SUPERFICIES CUÁDRICAS Y SUS COMBINACIONES (I)

SUPERFICIES DE CURVATURA SIMPLE

por

TOMÁS GIL LÓPEZ



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

5-72-01

SUPERFICIES CUÁDRICAS Y SUS COMBINACIONES (I)

SUPERFICIES DE CURVATURA SIMPLE

por

TOMÁS GIL LÓPEZ

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

5-72-01

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA

0 VARIOS
1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN

NUEVA NUMERACIÓN

5 Área
72 Autor
01 Ordinal de cuaderno (del autor)

Superficies cuádricas y sus combinaciones (I): Superficies de curvatura simple

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid
Gestión y portada: Nadezhda Vasileva Nicheva
CUADERNO 229.01/5-72-01
ISBN-13: 978-84-9728-220-8
ISBN-10: 84-9728-220-5
Depósito Legal: M-43103-2006

El objeto de esta publicación es mostrar al alumno de primer curso la aplicación práctica de las superficies cuádricas de curvatura simple en la cubrición de espacios arquitectónicos.

No se pretende realizar una clasificación exhaustiva de este tipo de cubiertas, sino más bien presentar las bóvedas más empleadas en arquitectura.

En este cuaderno, se va desarrollando paralelamente la explicación teórica y la representación gráfica, con objeto de hacer más sencilla su comprensión y, por tanto, más útil para el alumno.

Durante el desarrollo de la parte teórica, se han intercalado una selección de los teoremas de cuádricas más importantes. Como anexo a esta publicación, aparecen una clasificación más extensa de los mismos.

Los dibujos que acompañan a la exposición teórica se representan, indistintamente, en los sistemas aprendidos durante la primera parte del curso.

INDICE

1. SUPERFICIES CUÁDRICAS DE CURVATURA SIMPLE: CONO Y CILINDRO

1.1. Determinación

Se denominan ***cuádricas*** a las superficies de segundo orden o grado.

Una superficie de segundo orden tiene las siguientes **propiedades**:

- el máximo número de puntos en que puede ser cortada por una recta son dos
- la sección de la superficie por un plano es de orden dos, es decir, una cónica

Se dice que una superficie es de ***curvatura simple*** si sus planos tangentes contienen rectas de la misma[1].

El **cono** y **cilindro** de segundo grado son superficies:

- ***regladas***: se generan por el desplazamiento de una recta (*generatriz*) con sujeción a determinadas condiciones.

  Por ejemplo, una superficie puede venir determinada a partir del desplazamiento de una recta **a**, que pasando por un punto **V**, se apoya en una línea **d** [1.01].

- ***radiadas***: quedan determinadas por el haz de rectas (*generatrices*) que parten de un *vértice* (propio en el caso del cono e impropio en el caso del cilindro) y se apoyan en una curva (*directriz*) [1.02] [1.03].

  Estas superficies quedan determinadas, por tanto, por una *directriz* **r** (plana o alabeada) y un *vértice* **V** (propio o impropio). El vértice de la superficie define con cada punto de la *directriz* (**A**, **B**, **C**, ...) una *generatriz* (**a**, **b**, **c**, ...) .

  Una superficie radiada con un único vértice, puede tener infinitas directrices: **r**, **s**, ... (planas o alabeadas) [1.04].

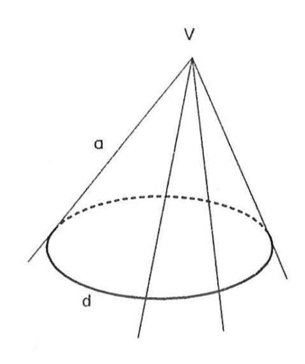
- ***desarrollables***: pueden extenderse sobre un plano, sin distorsión de sus partes [1.05].

  Como ejemplo, se ha desarrollado un cono de revolución de radio **r**. Los puntos de la directriz equidistan del vértice, por consiguiente su transformada será un arco de circunferencia de radio **g** y abertura $\alpha = r / g \times 360°$.

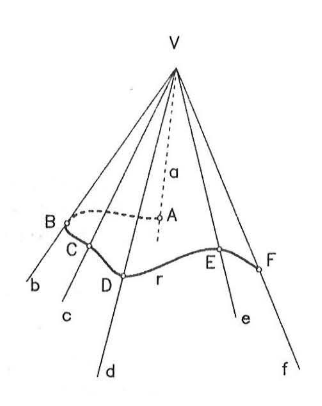
Además, pueden ser de ***revolución***, es decir, quedan determinadas por el movimiento de una recta **g** (*generatriz*) al girar alrededor de una recta **e** (*eje*)[2] [1.06].

[1] Se distinguen de las superficies de doble curvatura, donde los planos tangentes tienen un solo punto de contacto (ej. esfera).

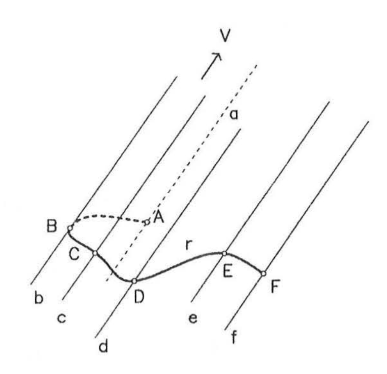
[2] La generatriz corta al eje en el caso del cono y es paralela a él en el caso del cilindro.



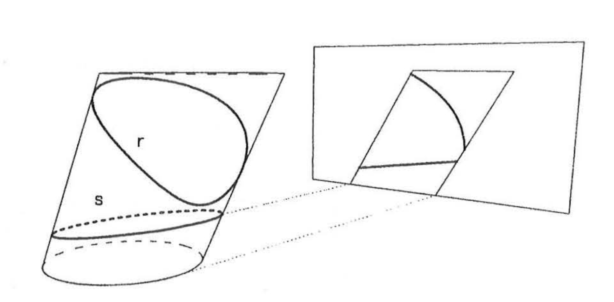
[1.01]



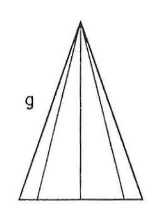
[1.02]

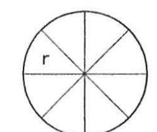


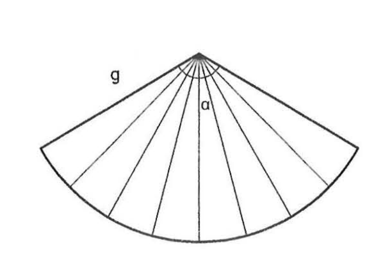
[1.03]



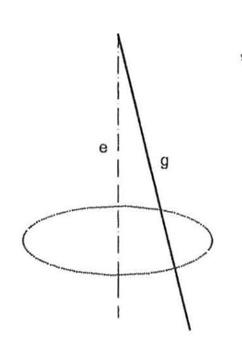
[1.04]

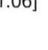






[1.05]





[1.06]

Una superficie cuádrica tiene **tres planos de simetría**. Podemos llamar *ejes* a las intersecciones de esos planos. Por lo tanto, una cuádrica tiene tres ejes. En el caso particular del cono, cuando hablamos simplemente de eje, nos referimos al que es interior a la superficie.

Un **cono** queda determinado por el valor de los semiejes de la elipse principal (sección plana perpendicular al eje interior del cono[3]) y la distancia al vértice [1.07].

Aunque la directriz de la sección recta del cono es siempre una elipse, ese mismo cono también puede tener como directriz otra elipse, una parábola o una hipérbola (resultantes de seccionarlo por diferentes planos, como se verá más adelante en el apartado 1.5) [1.08].

Si los semiejes de la elipse principal son iguales, el cono es de *revolución*. En caso contrario, se denomina *escaleno*.

En el caso del **cilindro**, su sección recta puede ser una elipse, una parábola o una hipérbola [1.09]. A diferencia del cono, todas las secciones planas del cilindro son de la misma naturaleza que su sección recta (como se verá más adelante en el apartado 1.5) y, por tanto, hay cilindros sin generatrices impropias (*elípticos*), con una (*parabólicos*) o con dos (*hiperbólicos*) generatrices impropias.

En el cilindro elíptico, si los semiejes de la elipse principal son iguales, se denomina de *revolución.*

1.2. Situación de puntos

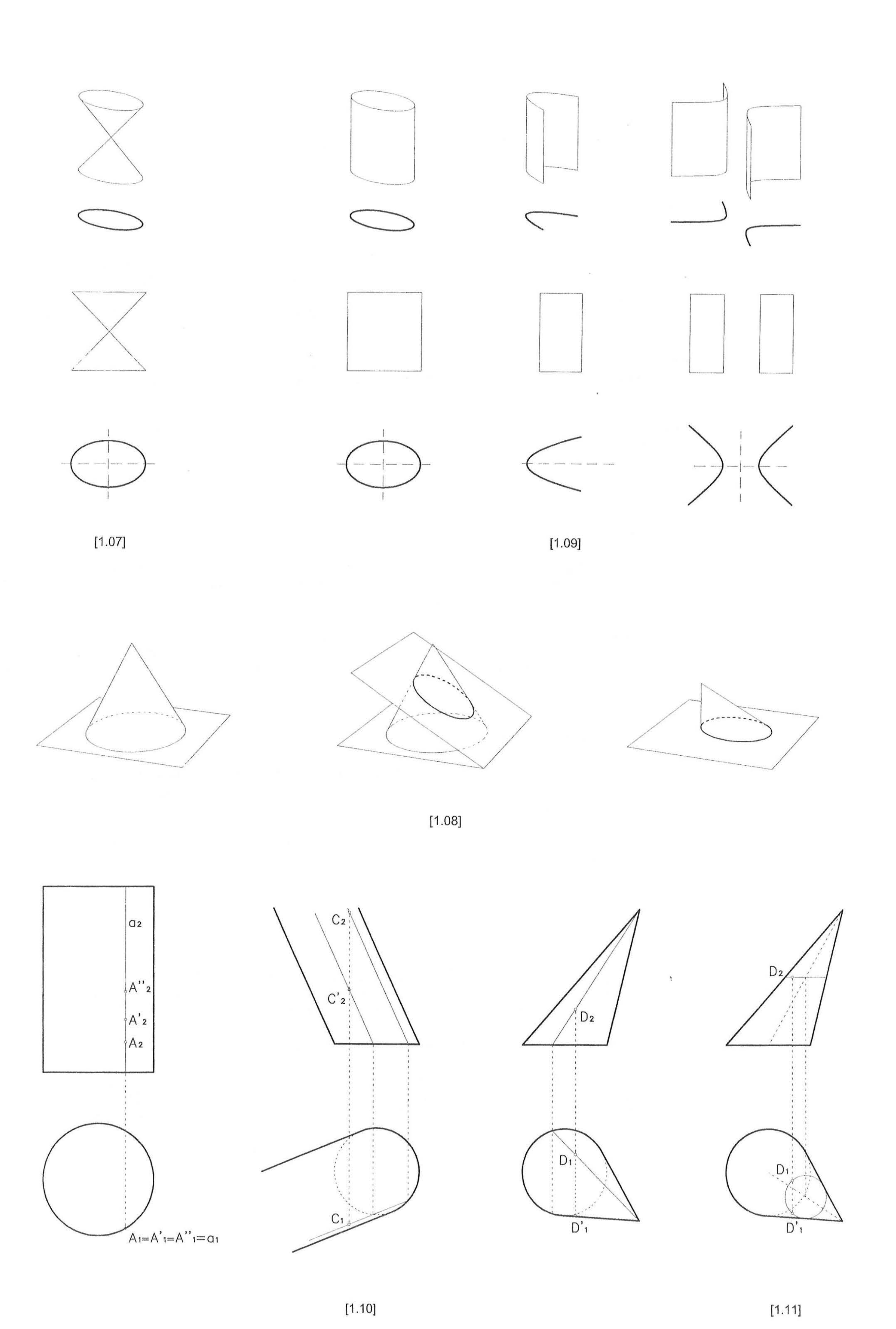
Los puntos pertenecientes a una superficie reglada forman parte de alguna de sus generatrices. Por consiguiente, basta con situar un **punto en una recta** (generatriz) de la cuádrica [1.10].

En esta la figura, representada en sistema diédrico, se muestra como la proyección de un punto en una de las vistas, corresponde a varias posibles proyecciones en la otra.

Otra forma, es ayudarse de **planos auxiliares**, cuya sección de la superficie sea sencilla de representar en un sistema determinado [1.11].

Por ejemplo, en esta figura se emplea un plano horizontal que corta a la superficie según una circunferencia, para situar puntos pertenecientes a la misma.

[3] Se denomina *sección recta*



[1.07]

[1.09]

[1.08]

[1.10]

[1.11]

1.3. Planos tangentes

Las tangentes a todas las líneas (rectas o curvas) pertenecientes a una superficie que pasan por un punto **forman un plano**. Ese plano se denomina *plano tangente* a la superficie en ese punto.

Precisando un poco más, este plano estará **determinado por las tangentes a dos líneas cualesquiera**, pertenecientes a la superficie, que pasen por un punto [1.12].

Por tanto, si por un punto de una superficie, pasa una línea recta, el plano tangente a la misma en un punto estará determinado por esa recta y la tangente a otra línea perteneciente a la superficie que pase por ese punto [1.13].

Sin embargo, un plano que sea tangente a una línea de una superficie, no tiene por que ser tangente a esa superficie.

Para **determinar el plano tangente a una superficie** se procederá de la siguiente forma:

- **en un *punto*** de la superficie.

  Al tratarse de superficies regladas, para obtener el plano tangente a una superficie en un punto perteneciente a la misma, basta con hallar la generatriz que lo contenga y una tangente a otra línea perteneciente a la superficie que pase por ese punto.

  Como todos los puntos pertenecientes a la generatriz de una cuádrica tienen el mismo plano tangente, el plano tangente a una superficie en un punto **P** quedará determinado por la generatriz que lo contiene **g** y por la correspondiente tangente **t** a la directriz **a**, en el punto **T**, intersección entre **g** y **a** (siendo **t** y **a** coplanarias) [1.14].

- **desde un *punto propio*** exterior a la superficie.

  Los planos tangentes desde un punto propio **P** deben contener a la recta **PV** (siendo V el vértice), puesto que todo plano tangente a una cuádrica, lo es a una generatriz de la misma y, por consiguiente, pasa por el vértice [1.15].

  Desde la traza **Q** de la recta **PV** en el plano de la directriz, se determinarán los puntos de tangencia a la misma **T** y **T'** y las generatrices correspondientes **g** y **g'**.

  Los planos de tangencia contendrán las rectas **a** y **g**; y **b** y **g'**, respectivamente.

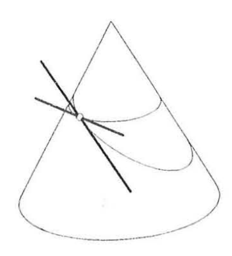
- **desde un *punto impropio*** (paralelo a una dirección).

  Los planos tangentes según una dirección **d** deben contener a la recta **QV**, siendo **Q** la traza en el plano de la directriz de la recta **c** que pasando por **V**, tiene la dirección **d**. Desde **Q** se obtienen las tangentes a la directriz, determinando los puntos de tangencia **T** y **T'** [1.16].

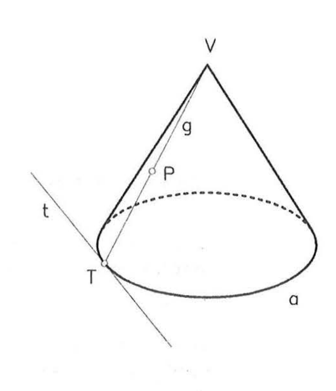
  En el caso del cilindro, la recta **c** es impropia, por ser **V** impropio.

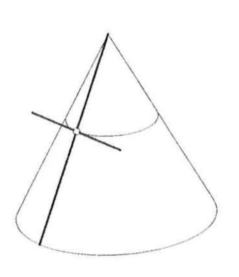
  Para la obtención del plano tangente, se definirá por un punto **P** cualquiera, un plano con las direcciones **d** y **g** (cualquier generatriz puesto que son todas paralelas). La traza de ese plano **QG** determina la dirección de las tangentes a la directriz, obteniendo los puntos de tangencia **T** y **T'**.

  Los planos de tangencia contendrán las rectas **a** y **g**; y **b** y **g'**, respectivamente.

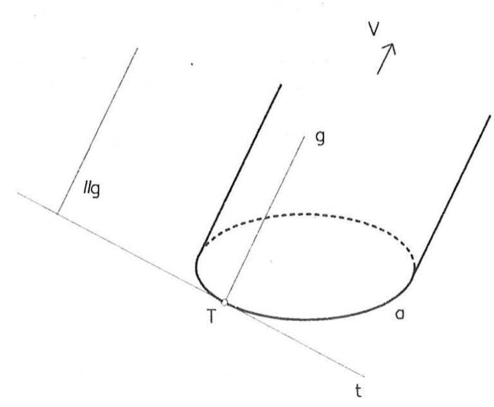


[1.12]

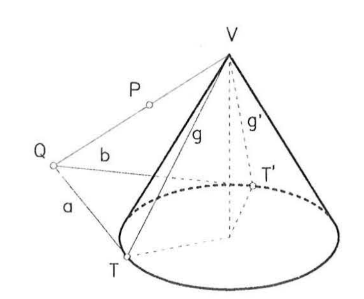


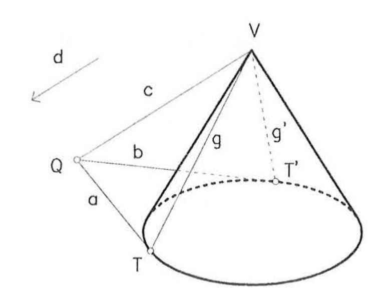


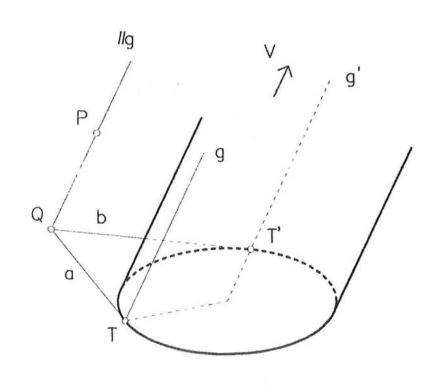
[1.13]



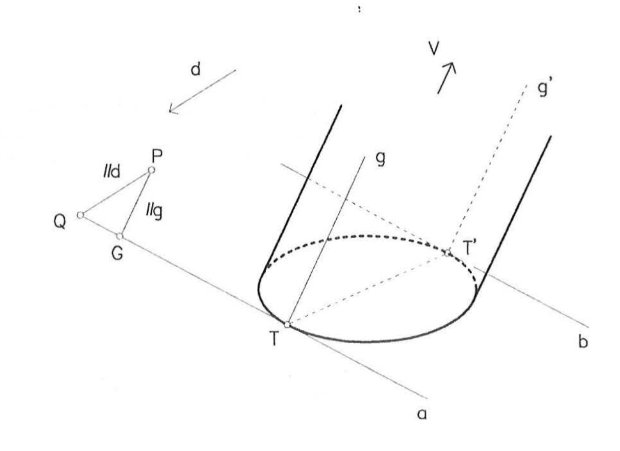
[1.14]







[1.15]



[1.16]

1.4. Contorno aparente

El contorno aparente de una superficie, en general, desde un punto de vista **V** (propio o impropio), es el **lugar geométrico** de los puntos de contacto entre la superficie y el cono circunscrito a la misma cuyo vértice es **V** [1.17].

Si el punto de vista es impropio, como ocurre en el caso de los sistemas de proyección cilíndricos[4], el contorno aparente será el lugar geométrico de los puntos de contacto entre la superficie y el cilindro circunscrito con vértice en el punto de vista impropio.

Así por ejemplo, en el sistema diédrico, existen dos contornos aparentes posibles (planta y alzado). Las generatrices que forman el contorno aparente en cada proyección no coinciden [1.18].

Por consiguiente, el contorno aparente **variará en función de la situación del punto de vista**. Luego, existen infinitos contornos aparentes a una única superficie [1.19].

De lo anterior, se deduce que, en un caso general, la línea que define el contorno aparente puede ser una línea recta o curva (plana o alabeada) y tiene las siguientes **características**:

- Puede existir o no en función de la situación del punto de vista.
- Cualquier proyección de un punto de la superficie es siempre interior al contorno aparente o pertenece al mismo.
- Cualquier línea perteneciente a la superficie que corte a la línea de contorno aparente, será tangente al mismo [1.20]. Las proyecciones de ambas líneas sobre un plano tendrán un punto de tangencia o un punto de retroceso (si existe un recta tangente a la línea de la superficie que pase por el punto de vista).

Para su **obtención**, se puede recurrir a:

a) *Planos de canto tangentes a generatrices*

Los contornos aparentes de las superficies radiales son, en cualquier proyección, las generatrices con plano tangente de canto [1.21].

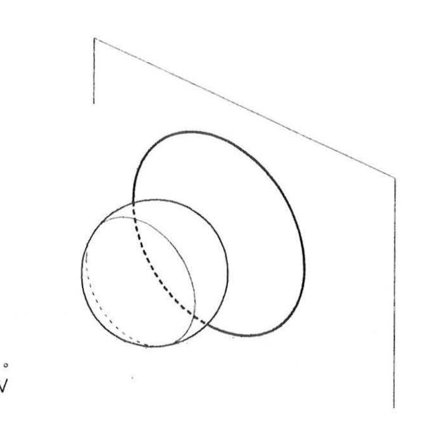
En esta figura, se representan los planos tangentes de canto al plano de proyección de un cono en sistema axonométrico, señalando las generatrices que forman el contorno aparente.

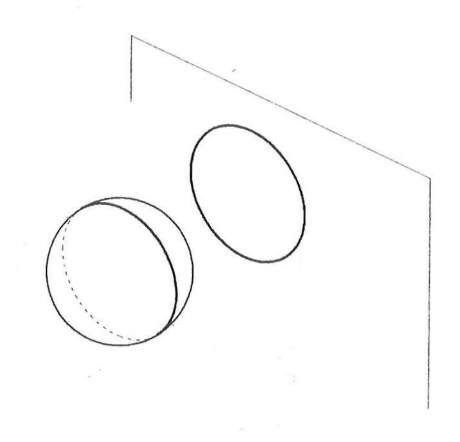
b) *Esfera inscrita*

Para hallar el contorno aparente de una superficie de revolución, se puede recurrir al dibujo de una esfera inscrita, siendo inmediatos los contornos aparentes en cualquier proyección al obtener la intersección entre ambas superficies [1.22].

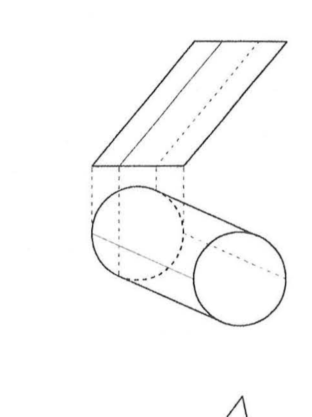
En esta figura, se ha trazado una esfera inscrita en un cono. Partiendo de la planta y el alzado y situando el vértice y el contorno aparente de la esfera, tendremos el contorno aparente del cono en una tercera proyección. Además, se ha dibujado en el alzado, la circunferencia y las generatrices que forman el contorno aparente de la esfera y del cono en la tercera proyección.

[4] Los sistemas de proyección cilíndricos son aquellos en los que los rayos proyectantes son paralelos entre sí (también se denominan sistemas de proyección paralelos). Por ejemplo, sistemas de proyección cilíndricos son el sistema diédrico, el sistema axonométrico, etc.

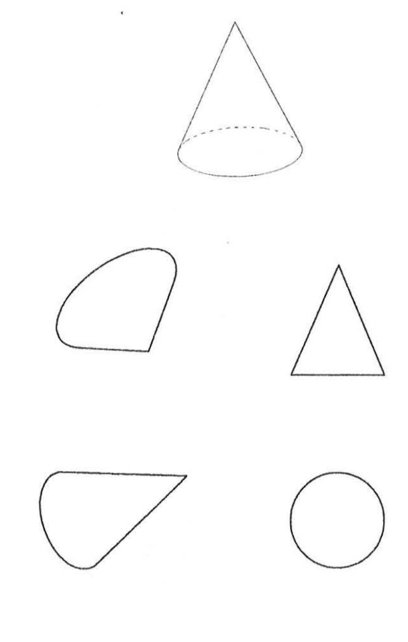




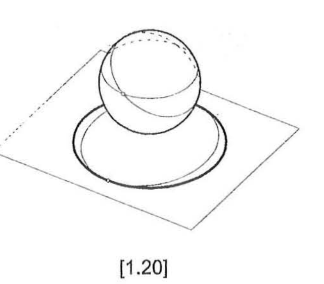
[1.17]



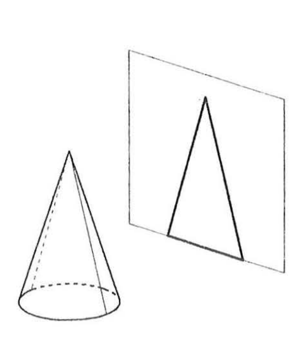
[1.18]



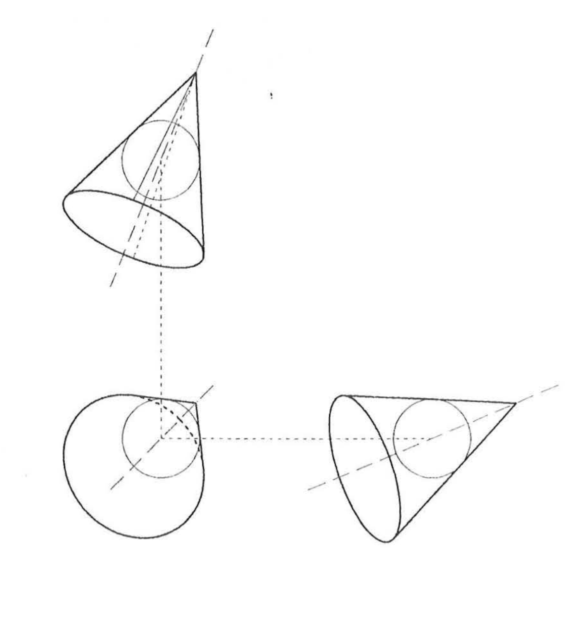
[1.19]



[1.20]



[1.21]



[1.22]

1.5. Secciones planas

Como se ha mencionado anteriormente, las superficies de segundo grado o cuádricas tienen como máximo dos puntos comunes con una recta no perteneciente a la misma y, como consecuencia, sus secciones planas **son cónicas** (elipse, parábola o hipérbola), **o degeneraciones de ellas** (punto, recta o dos rectas secantes).

Teorema [5]:

"Toda sección plana de una cuádrica es una cónica".

Además, entre dos secciones planas de la misma cuádrica, existe una relación de homología.

Teorema [6]:

"Dos secciones planas de una misma cuádrica son homológicas".

En el caso de una superficie radiada desarrollable, existe una relación de homología, tal que, el centro de homología es el vértice de la superficie[7] y el eje de la homología es la intersección de los planos que contienen a dichas secciones.

En general, la intersección de una superficie cuádrica **con cualquier plano *que pase por su vértice***, de existir, serán generatrices de la misma.

Los planos que pasan por el vértice tienen una traza sobre el plano en el que está contenida la directriz, que puede ser [1.23]:

- exterior: *no existe sección* con la cuádrica
- tangente: la sección con la cuádrica es *una generatriz*
- secante: la sección con la cuádrica son *dos generatrices*

Cuando **el plano *no pasa por el vértice*** de la cuádrica, la sección plana será:

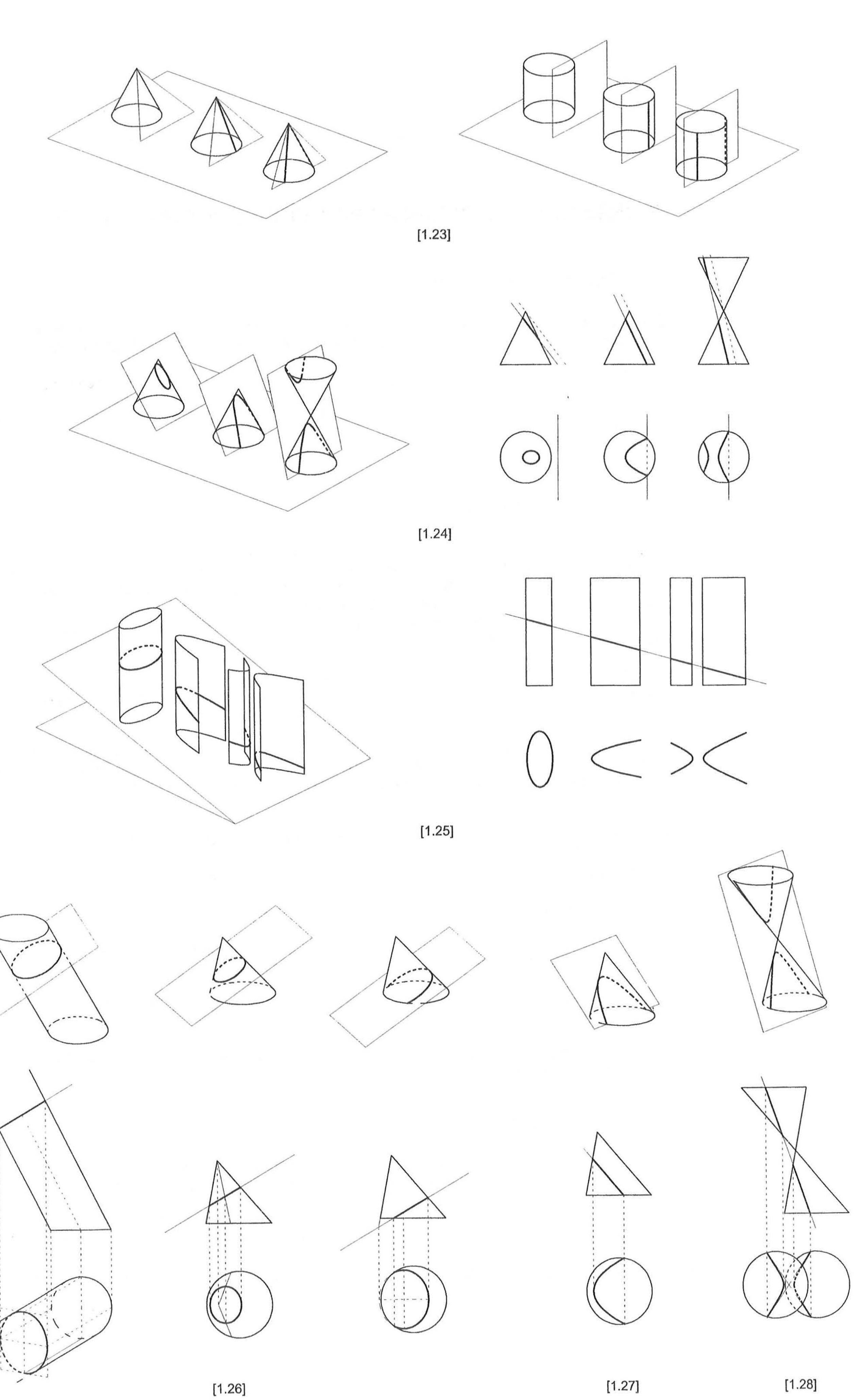
- en el caso del *cono* de 2º grado, tiene por sección plana una cónica que será del tipo: elipse, parábola o hipérbola, en función de que el plano paralelo al anterior que pase por el vértice, tenga la traza sobre el plano en el que esté contenida la directriz: exterior, tangente o secante a la misma [1.24].

- en el caso del *cilindro* de 2º grado, varía en función de que su sección recta, sea una cónica del tipo: elipse (cilindro *elíptico*), parábola (cilindro *parabólico*) o hipérbola (cilindro *hiperbólico*). Todas las secciones planas serán: elipses, parábolas o hipérbolas, respectivamente [1.25].

Si en alguna proyección, el plano de sección es proyectante, la cónica aparece degenerada en un segmento, una o dos semirectas (según sea elipse, parábola o hipérbola).

En las figuras siguientes se muestran algunos ejemplos de secciones de superficies cuádricas por planos que no pasan por el vértice, resultando los tres casos posible: **sección tipo *elipse*** [1.26], **sección tipo *parábola*** [1.27] y **sección tipo *hipérbola*** [1.28].

[5] Ver anexo: Teoremas de cuádricas
[6] Ver anexo: Teoremas de cuádricas
[7] Cuando el vértice es impropio, se trata de una afinidad.


[1.23]
[1.24]
[1.25]
[1.26]
[1.27]
[1.28]

2. INTERSECCIÓN ENTRE SUPERFICIES CUÁDRICAS

2.1. *Método de resolución*

El método que se va a exponer a continuación es válido para cualquier intersección entre dos superficies. La línea intersección se obtendrá mediante la **unión de puntos aislados**, determinados previamente.

El número de puntos estará en función del grado de precisión que se quiera obtener en cada caso.

Para ello, se emplearán **superficies auxiliares**, sencillas de representar (planos, esferas, ...) que faciliten la obtención de estos puntos.

2.1.1. *Planos auxiliares*

En general, para resolver la intersección de dos superficies **M** y **N** (de orden **m** y **n** respectivamente) que se intersecan, se pueden cortar por planos auxiliares (α, β, ...), generándose líneas planas (r_M, s_M, ... pertenecientes a la superficie M y r_N, s_N, ... pertenecientes a la superficie N), de orden máximo **m** y **n** respectivamente. Cada pareja de líneas pertenecientes a un plano (r_M y r_N, s_M y s_N, ...) pueden cortarse en **m** x **n** puntos como máximo. Estos puntos de corte van a pertenecer a ambas superficies, luego son puntos de la línea intersección de ambas superficies [2.01].

La unión de cada uno de estos puntos con su infinitamente próximo, permite obtener la línea intersección, cuyo orden máximo será **m** x **n**. En algunos casos, esta línea intersección puede descomponerse en otras de menor orden.

Para el caso particular que nos ocupa, la intersección entre superficies cuádricas regladas, se procurará que los planos auxiliares elegidos seccionen a las cuádricas mediante rectas (generatrices de las mismas) o curvas (directrices de las mismas) sencillas de representar en el sistema empleado:

a) Planos que pasen por los vértices (propios o impropios[8]) de las cuádricas

Las intersecciones de estos planos con las cuádricas son rectas [2.02].

Según lo indicado:

- en el caso de la intersección de *dos conos*, se trazarán planos auxiliares que pasen por los vértices de los mismos [2.03].
- en el caso de la intersección de *dos cilindros*, se trazarán planos auxiliares que sean paralelos a los ejes de los mismos [2.04].
- en el caso de la intersección de *un cono con un cilindro*, se trazarán planos auxiliares que pasen por el vértice del cono y sean paralelos al eje del cilindro [2.05].

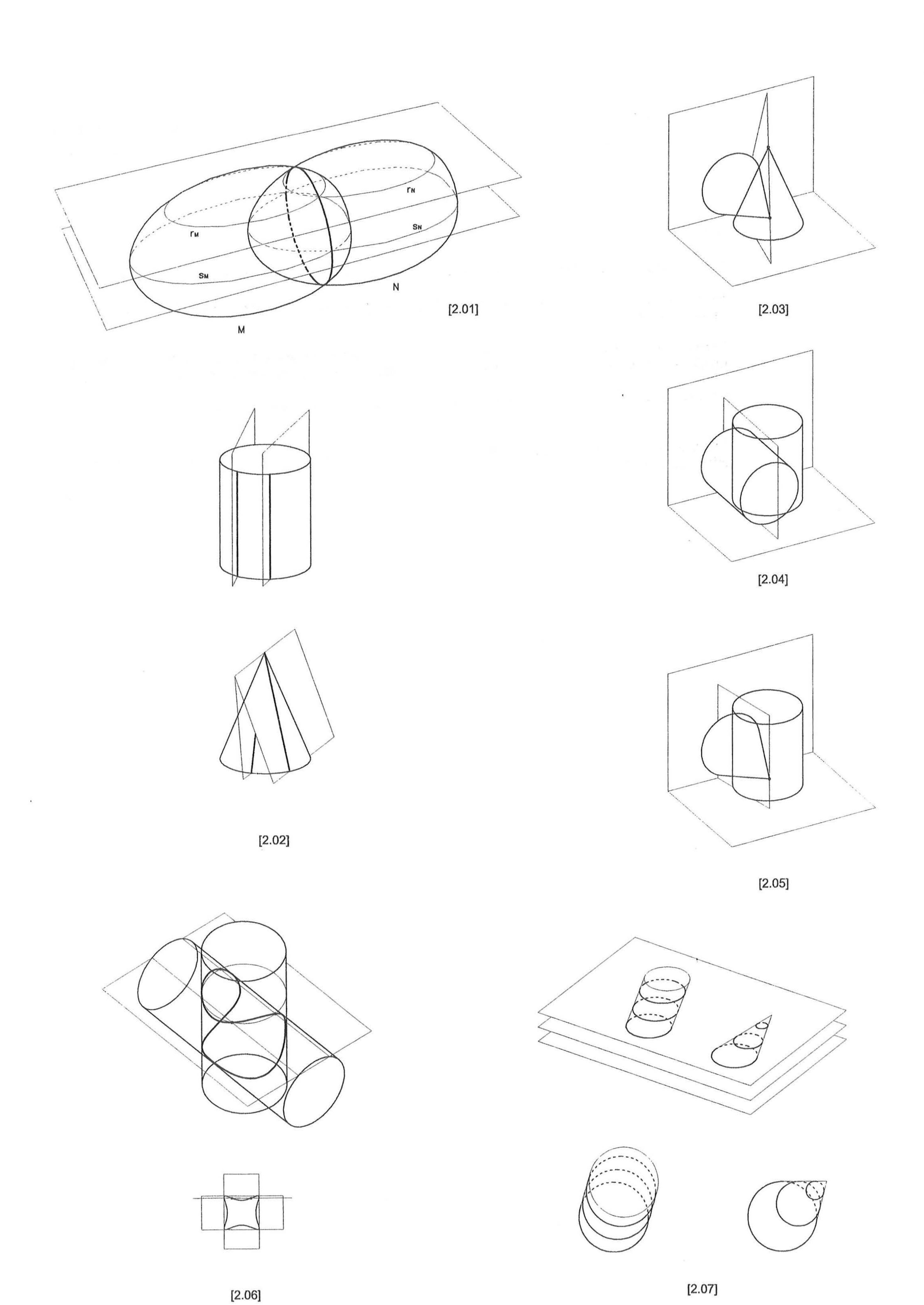
b) Planos proyectantes

Se recurrirá a planos proyectantes, cuando la intersección de ambas cuádricas con los planos auxiliares resulten curvas fáciles de definir en el sistema de representación empleado [2.06].

Las secciones por planos paralelos, en el caso del cono, serán líneas homotéticas y, en el caso del cilindro, líneas iguales superpuestas (en el cilindro recto) y trasladadas (en el cilindro oblicuo) [2.07].

---

[8] En el caso de superficies cuádricas con vértice impropio (cilindros), los planos auxiliares serán paralelos al eje del mismo.



[2.01]

[2.03]

[2.04]

[2.02]

[2.05]

[2.06]

[2.07]

2.1.2. Esferas auxiliares

En este caso, la superficie auxiliar elegida para facilitar la obtención de la intersección es la esfera.

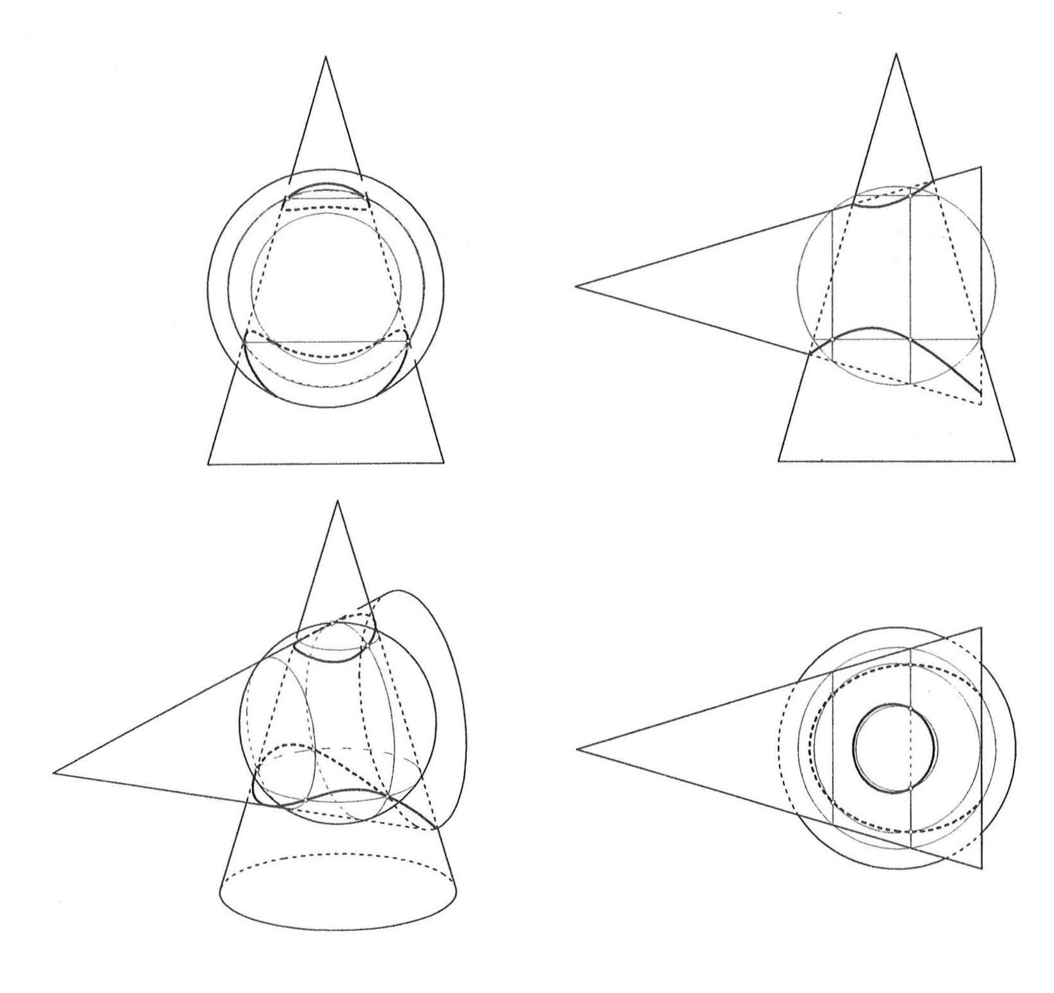
Este método es efectivo cuando las esferas auxiliares seccionen a las cuádricas mediante curvas fáciles de representar en el sistema empleado.

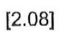
Por ejemplo, la intersección de superficies cuádricas con ejes incidentes es un caso sencillo de resolver mediante esferas auxiliares concéntricas con centro en la intersección de los ejes de las cuádricas [2.08].

La figura representa la intersección de dos conos con ejes incidentes, obtenida mediante este método.

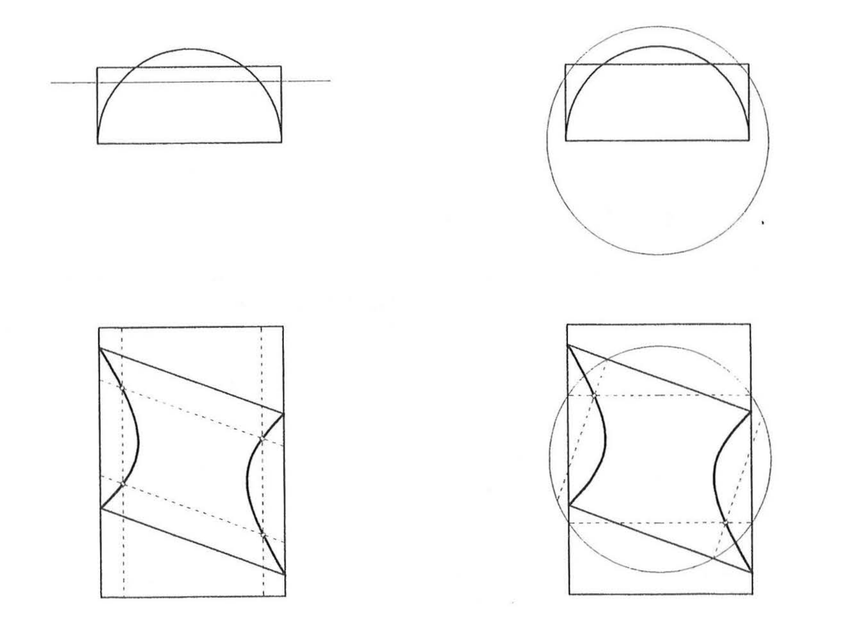
Como comparación, se ha obtenido la intersección de dos semicilindros[9], por medio de planos auxiliares, en el primer caso, y esferas, en el segundo [2.09].

[9] Se trata de dos bóvedas de cañón, como se verá posteriormente.





[2.08]



[2.09]

2.2. Determinación

El poder conseguir **identificar el tipo de intersección** y **obtener los puntos singulares** de la misma supone llegar a tener una mayor precisión en su trazado.

2.2.1. *Identificación de la intersección*

Para identificar la intersección, se determinarán los **elementos comunes a ambas superficies** con objeto de analizar la posible descomposición de la misma.

Como se ha mencionado, en general, cuando dos superficies **M** y **N** (de orden **m** y **n** respectivamente) se cortan, la intersección será una línea de un orden máximo **m** x **n**. Por consiguiente, la intersección entre dos superficies cuádricas (de segundo grado) es una curva de grado máximo cuarto (2° x 2° = 4°) que se denomina ***cuártica*** [2.10].

Teorema [10]:

> *"La intersección de dos cuádricas es, en general, una curva de cuarto grado y la proyección de esta curva sobre cualquier plano es, en general, una curva plana de cuarto grado".*

Se trata, por tanto, de una **curva alabeada**[11] que tiene como característica el tener un máximo de cuatro puntos en un plano.

Su trazado se realizará a través de puntos aislados.

Sin embargo, en algunas ocasiones, **la intersección puede reducirse a otras líneas de grado menor**. Como ejemplo, se analizan algunas de ellas:

- descomposición de la cuártica en dos ramas ambas alabeadas [2.11.a]. La obtención de ambas ramas será mediante la unión de puntos aislados.

  Como caso particular, una de estas ramas puede degenerar en un punto, siendo el resto de la intersección una cuártica (0°+4°=4°) [2.11.b].

- reducción de la cuártica a una recta y una cúbica (1°+3°=4°). Si dos superficies cuádricas tienen una recta (generatriz) en común, el resto de la intersección puede ser una cúbica alabeada [2.12]. La obtención de la misma será mediante la unión de puntos aislados.

  Teorema [12]:

  > *"La intersección de dos cuádricas regladas que tienen en común una generatriz, se completa con una curva de tercer grado".*

- reducción de la cuártica a dos cónicas (2°+2°=4°). Si dos superficies tienen una cónica en común, el resto de la intersección puede ser otra cónica [2.13]. Para conseguir una mayor precisión, el trazado de las cónicas se realizará por cualquier método conocido.

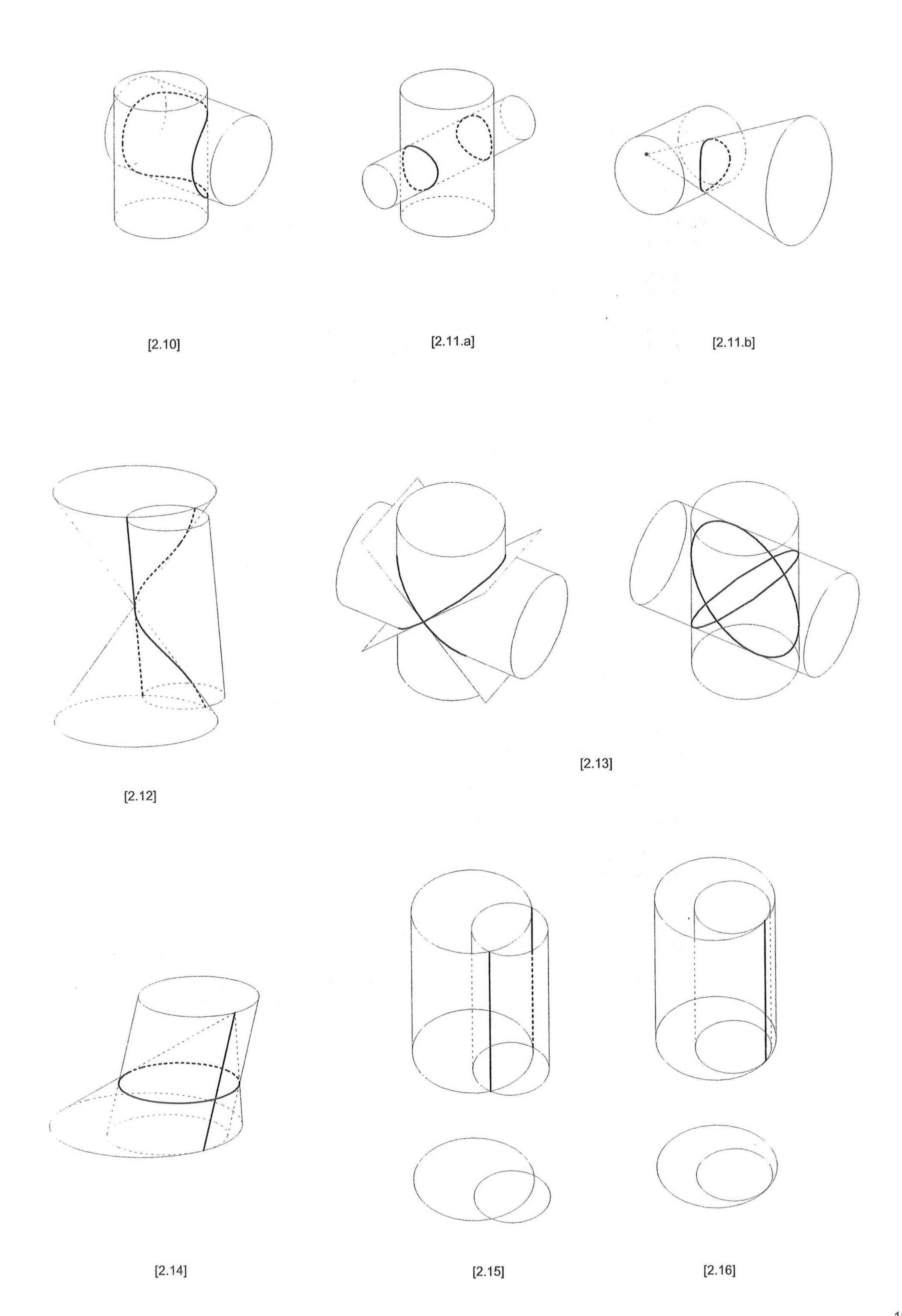
- reducción de la cuártica a una recta de puntos dobles más una cónica. Si las dos superficies que se cortan son tangentes a lo largo de una generatriz, el resto de la intersección es una cónica [2.14]. Al igual que en el caso anterior, el trazado de la cónica se realizará por cualquier método conocido.

- reducción de la cuártica a dos rectas [2.15]. Cuando las dos superficies se cortan a lo largo de dos generatrices.

- reducción de la cuártica a una recta de puntos dobles [2.16]. Cuando las dos superficies son tangentes, únicamente, a lo largo de una generatriz.

---

[10] Ver anexo: Teoremas de cuádricas
[11] Se denominan líneas alabeadas a las que no están contenidas en un plano.
[12] Ver anexo: Teoremas de cuádricas



[2.10] [2.11.a] [2.11.b]

[2.12] [2.13]

[2.14] [2.15] [2.16]

2.2.2. Puntos singulares y sus tangentes

Con objeto de lograr una mayor precisión en el trazado de la línea intersección, es necesario determinar los puntos singulares de la misma y sus tangentes.

Para facilitar su explicación, se han hallado los puntos singulares sobre un ejemplo concreto, la intersección de dos superficies semicilíndricas[13] [2.17].

- ***punto de contorno aparente***: es el punto de encuentro de la línea intersección con la generatriz que conforma el contorno aparente. La proyección de la intersección es tangente a esta generatriz.

  La determinación de estos puntos es de gran utilidad puesto que diferencian las partes vistas y ocultas de la intersección, como se verá más adelante.

  Para su obtención, en primer lugar habrá que hallar las generatrices del contorno aparente (ver apartado 1.4). En este caso, existen dos, una perteneciente al cilindro de mayor radio [2.18] y otra al de menor [2.19].

  En ambos cilindros, el problema se reduce a trazar una tangente a su directriz (una circunferencia en el cilindro mayor y una elipse en el cilindro menor) con la dirección del eje respectivo.

  Para obtener los puntos de intersección con las mismas, se utilizarán dos planos auxiliares horizontales (paralelos a los ejes de ambos cilindros) que contengan a cada una de las generatrices del contorno aparente. Según el método de resolución indicado anteriormente, se obtendrán los cuatro puntos buscados. La tangente a la línea intersección en estos puntos serán las generatrices del contorno aparente correspondientes.

- ***punto de mayor o menor cota***: es el punto de corte de la intersección con la generatriz de mayor o menor cota de ambas cuádricas. Los planos tangentes en esos puntos son horizontales.

  En este caso, las generatrices de mayor cota de cada cilindro se cortan en un punto, porque, precisamente, en ese punto se produce una tangencia entre las dos superficies. La intersección de las dos generatrices de mayor cota, determinará el punto buscado [2.20].

- ***punto de tangencia***: es el punto donde se confunden los planos tangentes de cada una de las cuádricas. Este plano estará determinado por las generatrices de ambas cuádricas que se cortan en ese punto.

  Como se ha indicado anteriormente, en este caso, coincide con el punto de mayor cota.

- ***otros puntos***: en cada ejemplo concreto pueden surgir otros puntos singulares.

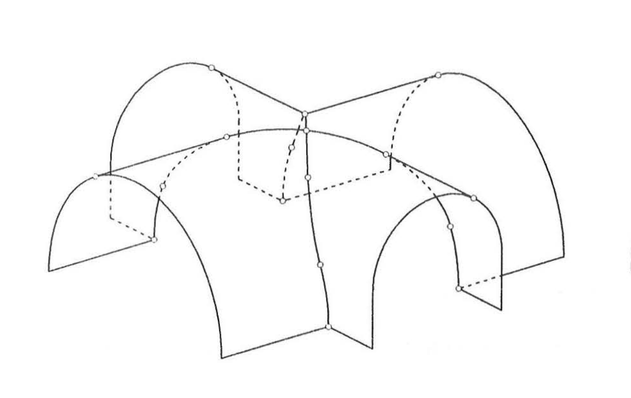
  En este caso, se consideran puntos singulares a los cuatro puntos donde la línea intersección pasa de la superficie cilíndrica de radio menor a la superficie plana (planos verticales laterales del semicilindro menor).

  Para su obtención, se utilizará un plano auxiliar horizontal que pase por esos puntos. La intersección de ese plano con los dos cilindros, dará cuatro generatrices, hallando los cuatro puntos buscados [2.21].

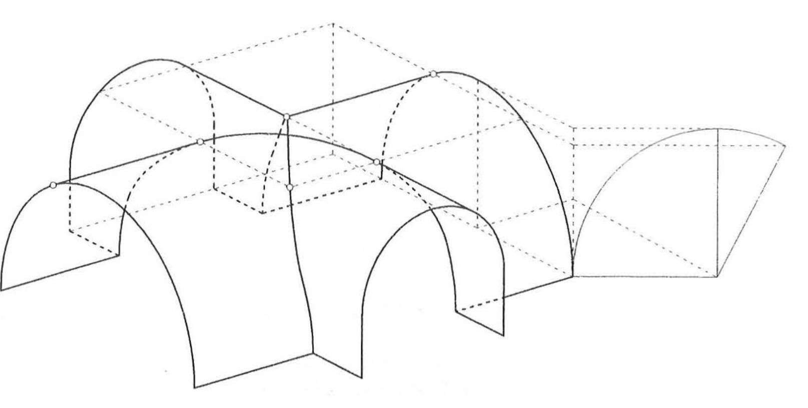
  Al existir en la intersección entre el semicilindro menor y los dos planos verticales, planos de tangencia comunes (verticales) a ambas superficies, la línea de intersección será continua, no produciéndose ningún punto anguloso. Es decir, existirá una única tangente en ese punto de la intersección.

Como resumen, se ha representado las líneas intersección con los puntos singulares y sus tangentes [2.22].

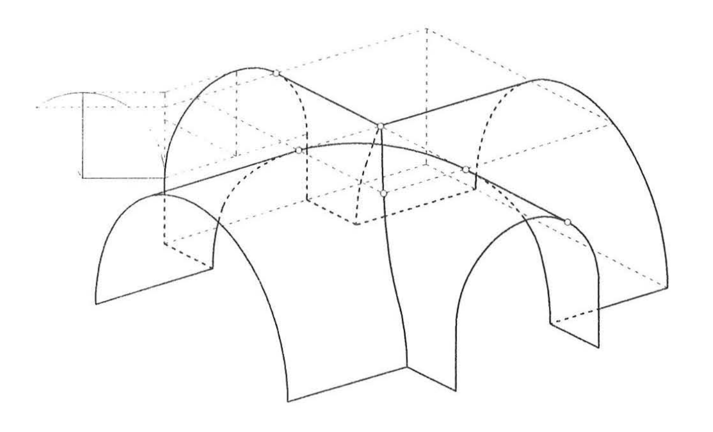
[13] Se trata de la intersección de dos bóvedas de cañón de distinta luz, resultando una bóveda por aristas alabeada, como se verá más adelante.



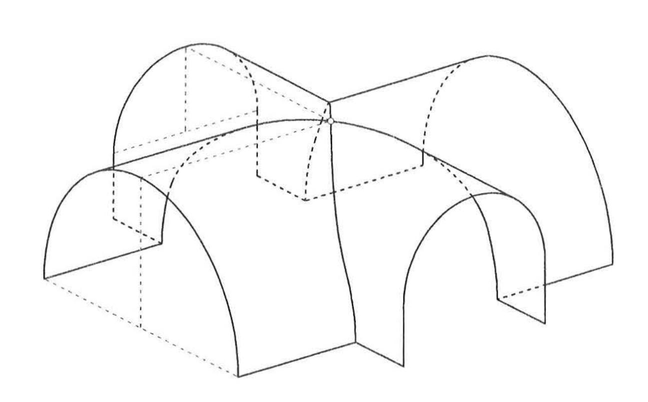
[2.17]



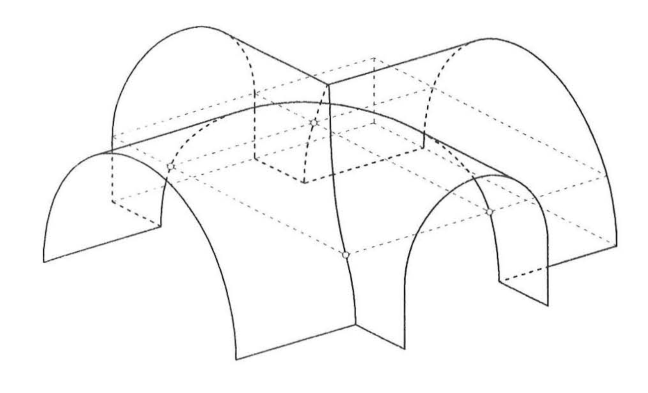
[2.18]



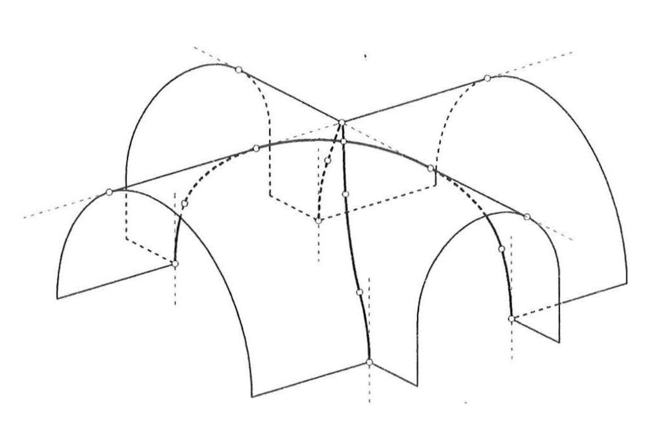
[2.19]



[2.20]



[2.21]



[2.22]

2.2.3. *Partes vistas y ocultas*

Se ha representado la intersección de dos semicilindros iguales que se cortan ortogonalmente [2.23.a].

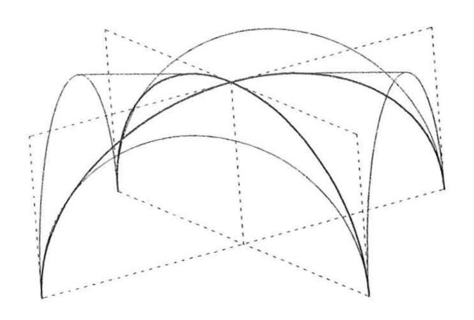
En la figura de la izquierda, se han tomado las partes exteriores a la intersección[14] y, en la figura de la derecha, las partes interiores[15].

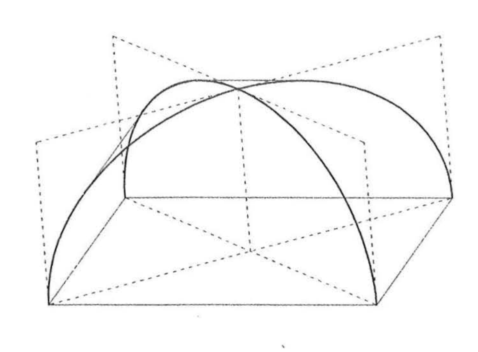
Sobre las líneas intersección, se han señalado los puntos singulares (ver apartado 2.2.2) [2.23.b].

Finalmente, se han representado dos vistas en el sistema axonométrico: una desde arriba [2.23.c] y otra desde abajo [2.23.d].

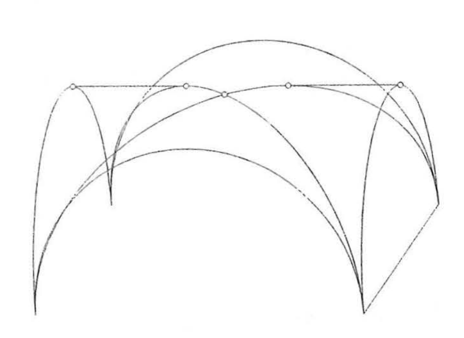
Como se aprecia las aristas vistas y ocultas varían. Sin embargo, puede **calcar una de otra**, cambiando las partes vistas y ocultas.

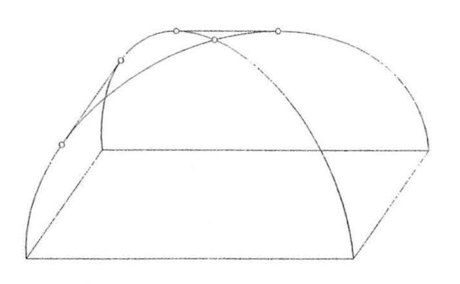
[14] Se trata de una bóveda por aristas recta, como se verá más adelante.
[15] Se trata de una bóveda en rincón de claustro recta, como se verá más adelante.



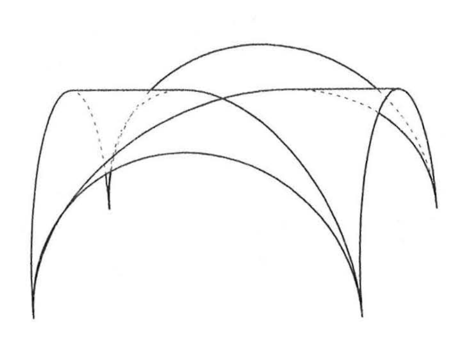


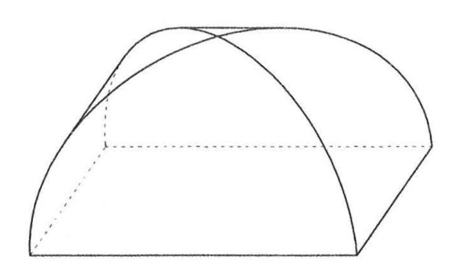
[2.23.a]



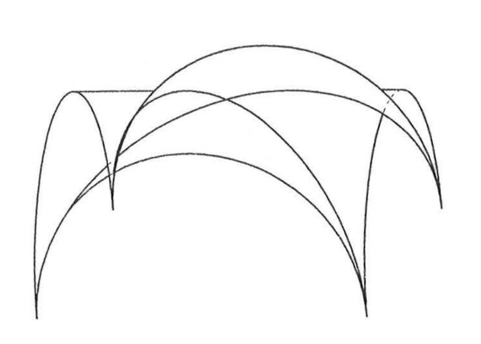


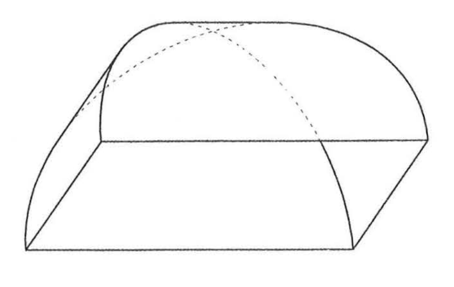
[2.23.b]





[2.23.c]





[2.23.d]

2.3. Posiciones de las superficies

2.3.1. Generales

a) Mordedura

Tiene lugar cuando **parte de la primera superficie no es cortada por la segunda y viceversa**.

La mordedura se produce cuando las rectas que pasan por el punto **T** (traza de la recta que une ambos vértices sobre el plano que contiene las dos directrices) cortan a una directriz y son tangentes a la otra [2.24].

La intersección es una **única curva alabeada** (cuártica).

b) Tangencia

- ***Simple***

Surge cuando **ambas superficies tienen un punto en común con el mismo plano tangente**.

La tangencia simple se produce cuando una de las rectas que pasan por el punto **T** (traza de la recta que une ambos vértices sobre el plano que contiene las dos directrices) es tangente a las directrices de ambas superficies [2.25].

La intersección es una **única curva alabeada** (cuártica), en forma de ocho, que se corta consigo misma en el punto doble. Las generatrices de ambas superficies que se cortan en ese punto, definen el plano tangente a ambas cuádricas.

Como ejemplo, se representa la intersección de dos cilindros de revolución, de distinto radio, cuyos ejes se cruzan ortogonalmente y con un punto de tangencia común **T** (en el que ambas superficies tiene un plano tangente común) [2.26]. El método de planos auxiliares, en este caso horizontales por ser paralelos a los ejes de ambos cilindros, permite dibujar la línea de la intersección. Los puntos singulares de la intersección serán: el punto **T** (punto doble de la curva y punto de mayor cota de la intersección), los puntos del contorno aparente **A**, **B** y **C** (del cilindro menor) y **D** y **E** (del cilindro mayor) y los puntos de menor cota de la intersección **F** y **G**.

- ***Doble o bitangencia***

Surge cuando **ambas superficies tienen dos puntos comunes con los mismos planos tangentes**.

La tangencia doble se produce cuando dos de las rectas que pasan por el punto **T** (traza de la recta que une ambos vértices sobre el plano que contiene las dos directrices) son tangentes a las directrices de ambas superficies [2.27].

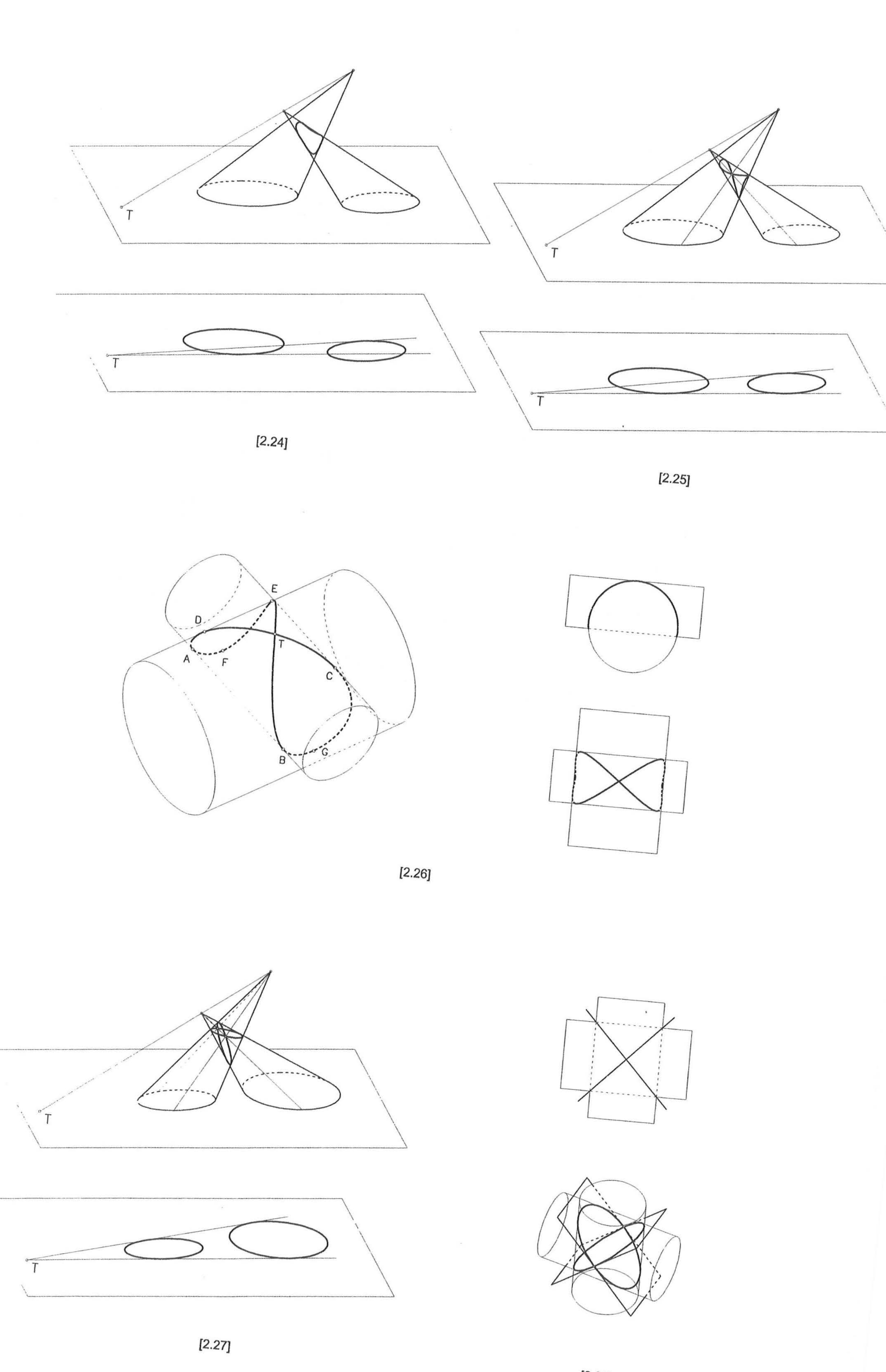
Teorema [16]:

> *"Dos cuádricas tangentes en dos puntos, se cortan según dos curvas planas (cónicas) que pasan por dichos puntos".*

Por consiguiente, la intersección son **dos cónicas que se cortan en los dos puntos dobles**. Al igual que ocurre en el caso anterior, las generatrices de ambas superficies que se cortan en esos puntos, definen los planos que son tangentes, a la vez, ambas cuádricas [2.28].

---

[16] Ver anexo: Teoremas de cuádricas



[2.24]

[2.25]

[2.26]

[2.27]

[2.28]

Cuando la intersección se reduce a curvas planas (de segundo grado), es útil recurrir a cambios de proyección con objeto de dejar los planos que contienen a la línea intersección como proyectantes [2.29].

c) *Penetración*

Tiene lugar cuando **una de las superficies atraviesa a la otra**.

La penetración se produce cuando las rectas que pasan por el punto **T** (traza de la recta que une ambos vértices sobre el plano que contiene las dos directrices) son tangentes a una misma directriz y cortan siempre a la otra [2.30.a].

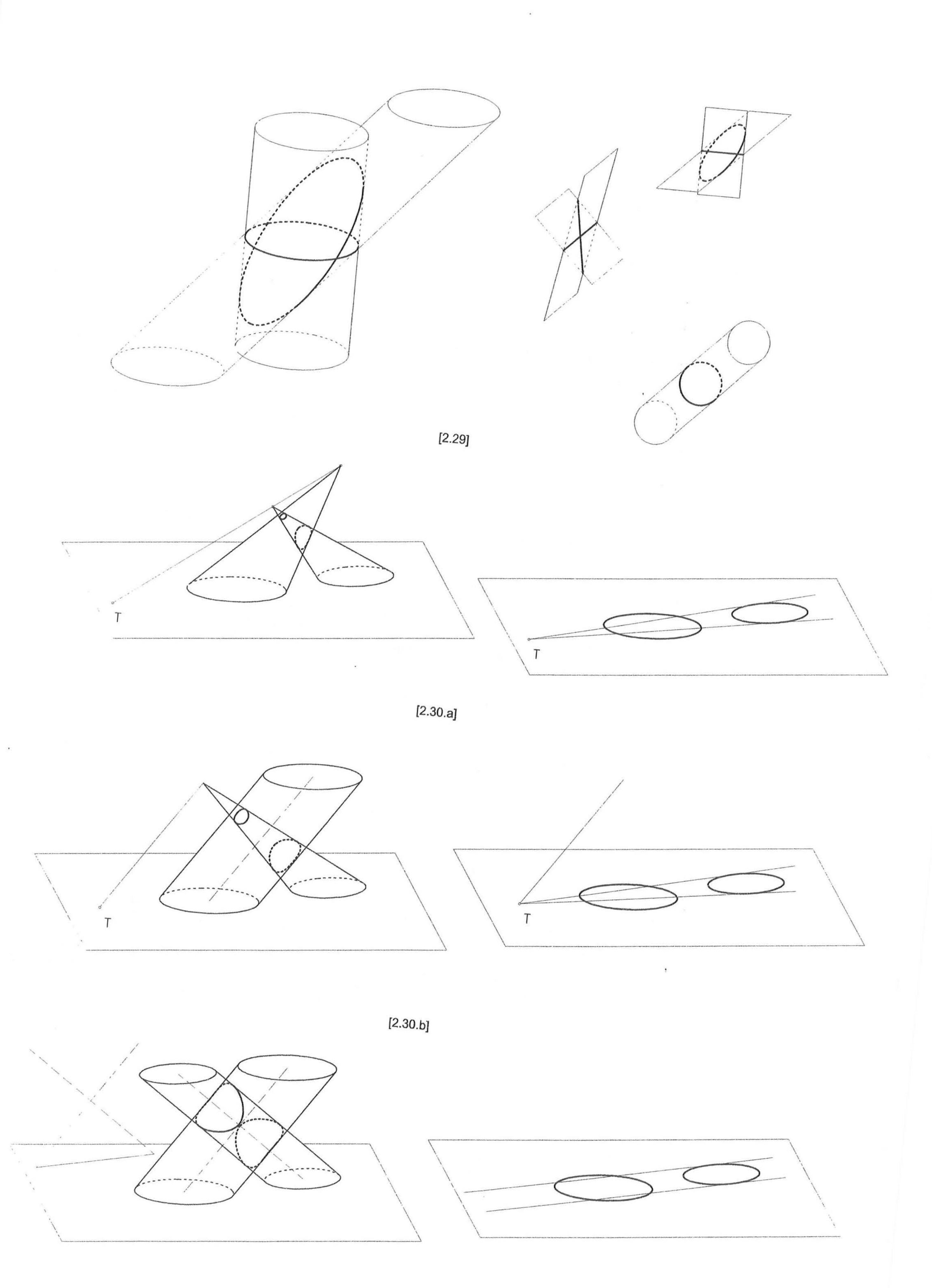
La intersección es una **cuártica que se descompone en dos ramas** ambas alabeadas independientes (una de entrada y otra de salida).

Como ejemplo, se ha representado además, la intersección de un cono y un cilindro [2.30.b] y la intersección de dos cilindros [2.30.c].

En la intersección de cono y cilindro, al igual que se ha procedido anteriormente, el punto **T** se obtiene determinando la traza de la recta que pasa por los vértices de ambas superficies sobre el plano que contiene a las dos directrices. Como el vértice del cilindro es impropio, la recta pasará por el vértice del cono y será paralela a las generatrices del cilindro.

En la intersección de dos cilindros, repitiendo el mismo procedimiento, la recta debe pasar por los vértices de los dos cilindros, ambos impropios. Por tanto, se trata de una recta impropia, siendo su traza T, sobre el plano que contiene a las dos directrices, también impropia.

En este caso, el haz de rectas que parte del punto T, al ser impropio, son paralelas según la dirección de la traza del plano que forman dos generatrices (una de cada cilindro).



[2.29]

[2.30.a]

[2.30.b]

[2.30.c]

2.3.2. Particulares

a) Radiales con cónica común

Teorema [17]:

"Dos cuádricas que tienen una cónica común (reducida o no), el resto de la intersección ***será otra cónica*** *(reducida o no)".*

Se representa, como ejemplo, la intersección de dos conos que comparten la misma directriz (en este caso, se trata de una circunferencia). El resto de la intersección será otra cónica (en este caso, se trata de una elipse) [2.31].

Proyectadas sobre un plano perpendicular a los planos que las contienen, se reducen a dos segmentos, por estar contenidas ambas curvas en sendos planos proyectantes.

b) Cuádricas con esfera inscrita común

Teorema [18]:

"Dos cuádricas circunscritas a la misma esfera, se cortan según dos curvas planas cuyos planos ***forman un haz*** *con los correspondientes a las curvas de tangencia".*

A modo de ejemplo, se muestran las intersección de dos cilindros en el sistema axonométrico y diédrico (planta) [2.32.a] y dos intersecciones diferentes entre un cono con un cilindro en el sistema diédrico (planta) [2.32.b]. Todas ellas se caracterizan por tener una esfera inscrita común de centro la intersección de sus ejes, los planos que contienen a las circunferencias de contacto de la esfera con las dos cuádricas y los planos que contienen a la intersección, forman un haz.

c) Cuádricas con plano de simetría común

Teorema [19]:

"La intersección de dos cuádricas que tienen un plano de simetría común, se ***proyecta ortogonalmente*** *sobre ese plano o uno paralelo a él* ***como una cónica*** *(curva que puede degenerar en dos rectas)"*

Este teorema se completa con los enunciados a continuación.

d) Cuádricas de revolución con ejes incidentes

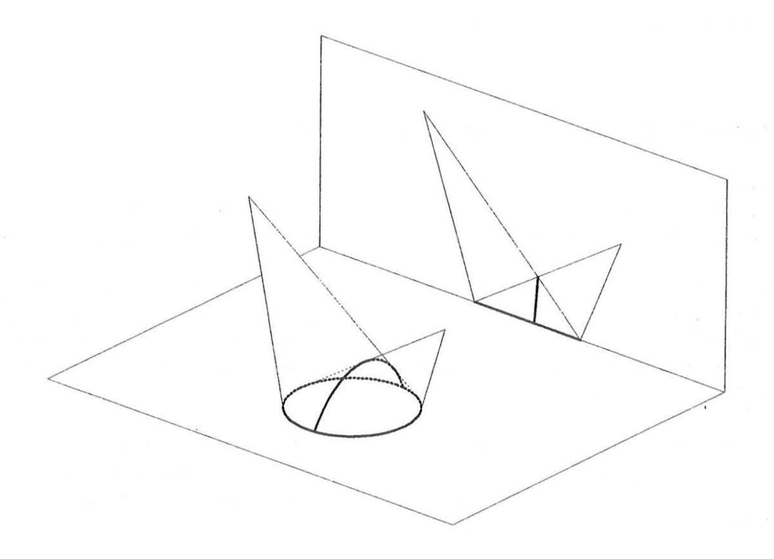
Teorema [20]:

"La intersección de dos cuádricas de revolución de ejes incidentes se ***proyecta ortogonalmente*** *en el plano de los ejes o uno paralelo a él según* ***arco o arcos de la misma hipérbola****"*

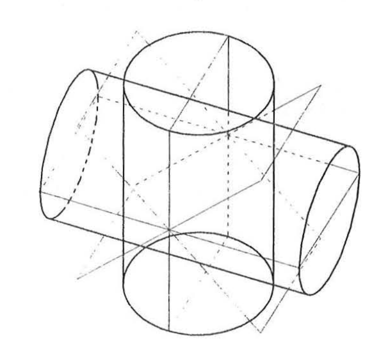
La determinación de la intersección se puede obtener por planos auxiliares (ver apartado 2.1.2) o por puntos mediante esferas auxiliares (ver apartado 2.1.2). En este segundo caso, la menor esfera auxiliar será la inscrita en una de las superficies y secante a la otra. Cualquier esfera mayor, determina dos pares de puntos de la intersección [2.33].

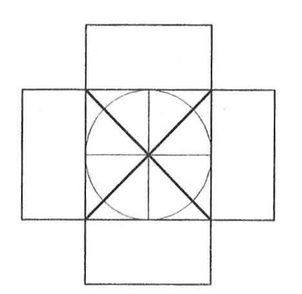
---

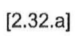
[17] Ver anexo: Teoremas de cuádricas
[18] Ver anexo: Teoremas de cuádricas
[19] Ver anexo: Teoremas de cuádricas
[20] Ver anexo: Teoremas de cuádricas



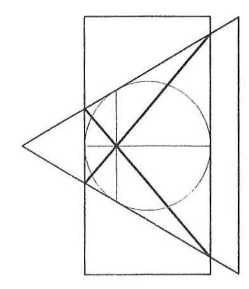
[2.31]

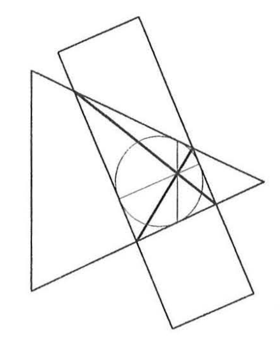






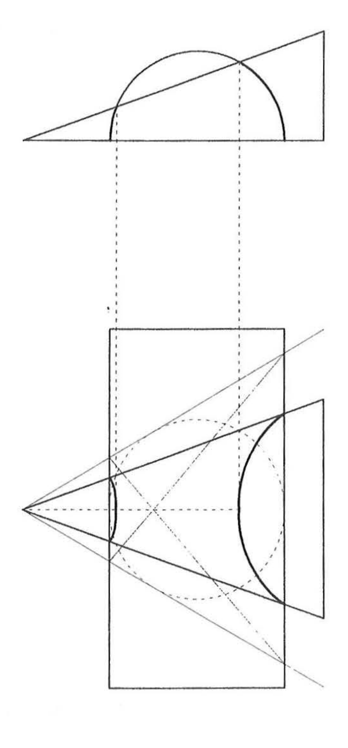
[2.32.a]







[2.32.b]



[2.33]

Lo anteriormente dicho, puede completarse aun más.

Teorema [21]:

"Si una cuádrica corta a dos cuádricas homotéticas y las tres tienen un plano de simetría común, la proyección ortogonal de las intersecciones sobre dicho plano son cónicas homotéticas"

Luego, a partir de este teorema y teniendo en cuenta el expresado en el punto anterior, la intersección de dos cuádricas de revolución con ejes incidentes en las que se pueda inscribir una esfera común, proyectada sobre un plano perpendicular a la misma, dará una hipérbola degenerada en dos rectas. Es decir las direcciones de las **asíntotas de las hipérbolas** que surgirán al intersecar una de esas cuádricas con homotéticas de la otra.

Lo anteriormente descrito se muestra en la intersección de un mismo cilindro con otros tres homotéticos [2.34.a] [2.34.b] [2.34.c]. En los tres casos se proyectará como hipérbolas homotéticas, pero en el caso en el que se inscribe la esfera común [2.34.c], esta hipérbola degenerará en dos rectas que son las asíntotas de las hipérbolas anteriores.

Finalmente, se han superpuesto las tres intersecciones [2.34.d].

e) *Cuádricas de revolución con ejes paralelos*

Teorema [22]:

"La intersección de dos cuádricas de revolución con ejes paralelos ***se proyecta ortogonalmente*** *en el plano de los ejes o uno paralelo a él según* ***arco o arcos de la misma parábola****"*

La determinación de la intersección se obtiene por puntos mediante planos auxiliares (ver apartado 2.1.1).

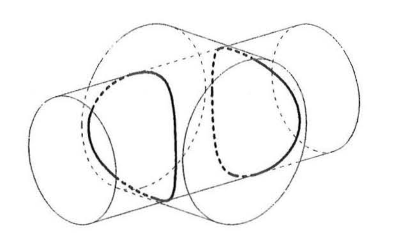
En este caso, al tratase de dos cuádricas de revolución, se emplean planos proyectantes, perpendiculares a sus ejes, dando circunferencias en ambas superficies [2.35.a].

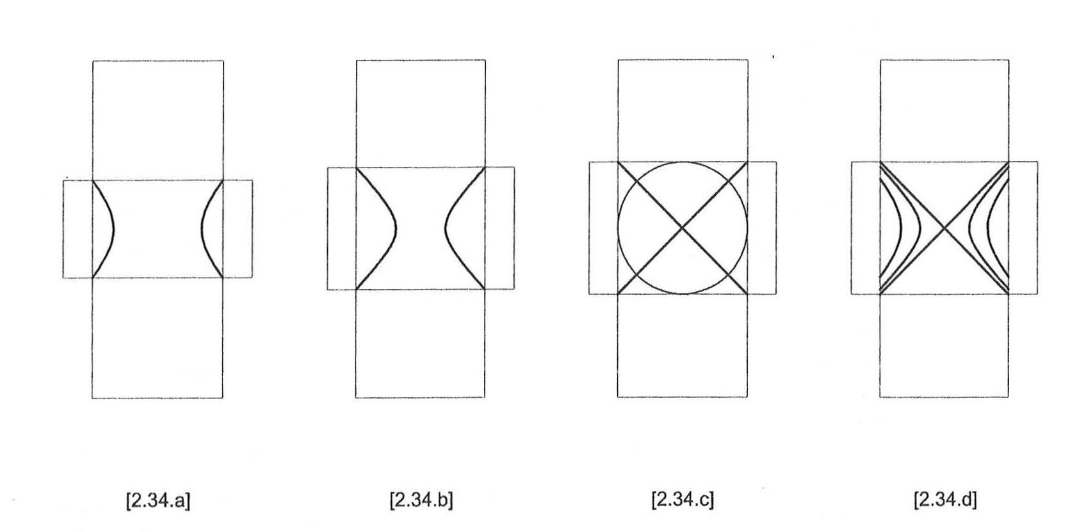
En el caso que sean dos cuádricas de revolución con ejes paralelos, circunscritas a la misma esfera, la parábola intersección proyectada en un plano perpendicular a la misma aparecerá degenerada en dos rectas paralelas [2.35.b].

---

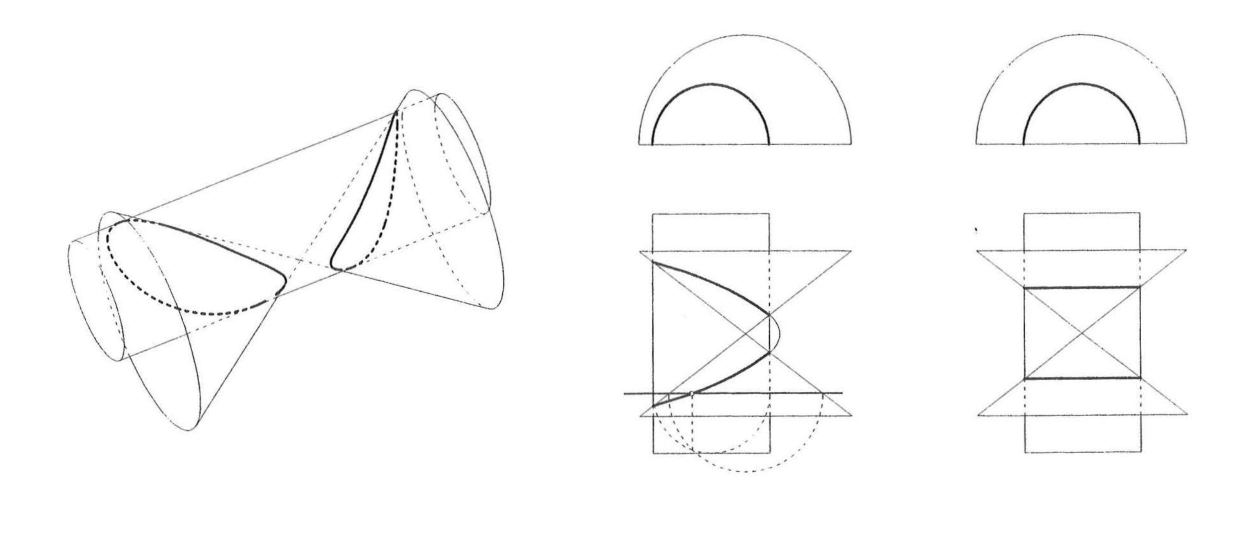
[21] Ver anexo: Teoremas de cuádricas

[22] Ver anexo: Teoremas de cuádricas





[2.34.a] [2.34.b] [2.34.c] [2.34.d]



[2.35.a] [2.35.b]

3. GENERACIÓN DE FORMAS ARQUITECTÓNICAS. BÓVEDAS

3.1. Definición

Son elementos constructivos superficiales, de curvatura simple, que cierran o cubren el espacio, trabajando fundamentalmente a compresión.

Estas superficies se generan por traslación de una arco (*directriz*) a lo largo de una recta (*generatriz*). Esta traslación da lugar a superficies de curvatura simple.

El cruce de este tipo de cubriciones genera nuevas bóvedas como intersección de las superficies anteriores.

Geométricamente [3.01.a][23], una bóveda queda definida por dos superficies que la limitan: *intradós* (interior) y *tradós* (exterior). La separación entre ambas define el espesor de la cubierta. Tanto el intradós como el trasdós, se generan a partir de una *directriz* (arco) que se desplaza a lo largo de una *generatriz*. El *eje* de la misma marca la dirección del espacio que cubre. El *arranque* de la bóveda es el plano de apoyo de la misma. La distancia entre sus apoyos se denomina *luz*. La *montea* es la distancia vertical desde el plano de arranque hasta la parte de mayor cota del intradós.

Constructivamente [3.01.b][24], si el material de una bóveda es la piedra, cada una de las piezas convenientemente labrada se denominan *dovelas*. La dovela de mayor altura se denomina *clave*. Cuando las dovelas se hallan yuxtapuestas a la misma altura, se dice que éstas forman una *hilada*. Entre las diferentes hiladas, se distinguen las de arranque, construidas por las primeras dovelas que se apartan del plomo de los *muros de apoyo*. En algunas ocasiones, la hilada de arranque se coloca sobre una *imposta*.

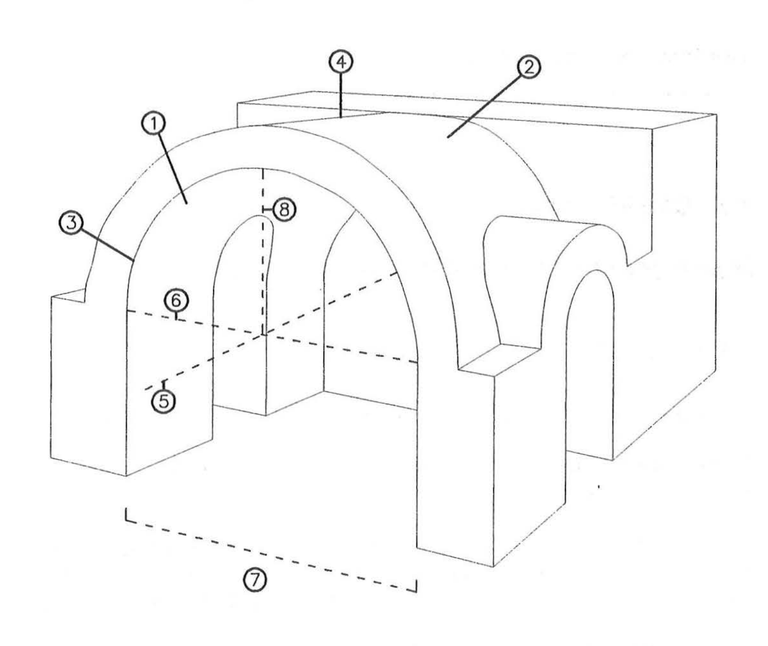
Debido a su sencillez constructiva, las superficies más utilizadas como elementos de cubrición de espacios arquitectónicos son las cuádricas de revolución (directriz circular). Por este motivo, esta publicación se centra fundamentalmente en ellas.

La mayor parte de estas cubiertas se generan a partir del cilindro de revolución. El cono de revolución se utiliza con menos frecuencia, teniendo generalmente una función de abocinamiento del espacio o de elemento de transición entre planta cuadrada y octogonal.

---

[23] La figura procede de una publicación del Colegio de Arquitectos de Galicia.

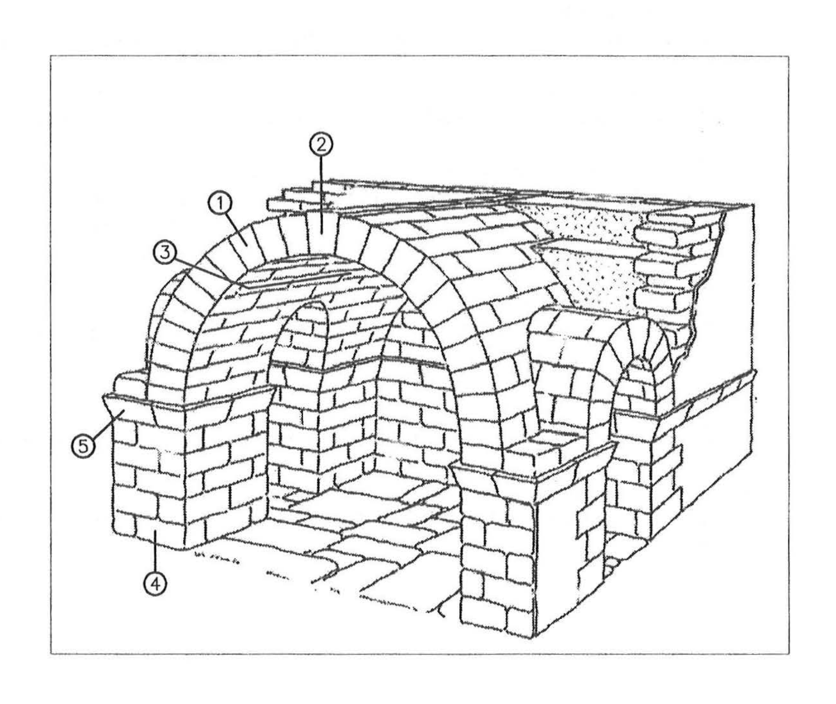
[24] La figura procede de una publicación del Colegio de Arquitectos de Galicia.



ELEMENTOS GEOMÉTRICOS

1. INTRADÓS
2. TRADÓS
3. DIRECTRIZ
4. GENERATRIZ
5. EJE
6. ARRANQUE
7. LUZ
8. MONTEA

[3.01.a]



ELEMENTOS CONSTRUCTIVOS

1. DOVELA
2. CLAVE
3. HILADA
4. MURO DE APOYO
5. IMPOSTA

[3.01.b]

3.2. Clasificación

Según la ***geometría del intradós***, se podrían clasificar[25] en:

3.2.1. Simples

Constituidas por una única superficie, definiendo un espacio unidireccional (según el eje de la bóveda).

Suelen sustentarse a lo largo de los dos apoyos lineales, aunque a veces se soportan mediante arcos, denominados fajones [3.02].

Como se ha mencionado anteriormente, las superficies cuádricas de curvatura simple se generan a partir de una *directriz* (arco) que se desplaza a lo largo de una *generatriz*. La forma y disposición de ambos elementos (generatriz y directriz), permite diferenciar varios tipos de bóvedas simples.

Según la ***posición de las generatrices*** [3.03], se distinguen entre:

a) Cilíndricas o de generatrices paralelas

Generalmente cubren superficies de lados paralelos (plantas rectangular, cuadrada, romboidal, ...), aunque también pueden cubrir plantas elíptica, circular, etc [3.04].

Suelen resolverse mediante superficies cilíndricas de eje horizontal, excepto cuando se trata de cubrir espacios inclinados o se quiere producir una compresión o dilatación espacial.

Algunas de las bóvedas utilizadas para la cubrición de edificios arquitectónicos son:

- *Bóveda de* ***cañón***
  Es aquella cuya directriz perpendicular al eje de la bóveda es un arco de media circunferencia [3.05].

  En ocasiones, la directriz perpendicular al eje de la bóveda de cañón, es un arco menor o mayor de media circunferencia, denominándose bóvedas **rebajada** y **peraltada**, respectivamente.

  También se denomina *bóveda rebajada*, cuando la directriz perpendicular al eje de la bóveda es media elipse o un arco menor de la misma cuyo eje menor está en posición vertical [3.06]. Del mismo modo, también se denomina *bóveda peraltada*, cuando la directriz perpendicular al eje de la bóveda es media elipse o un arco menor de la misma cuyo eje mayor está en posición vertical [3.07].

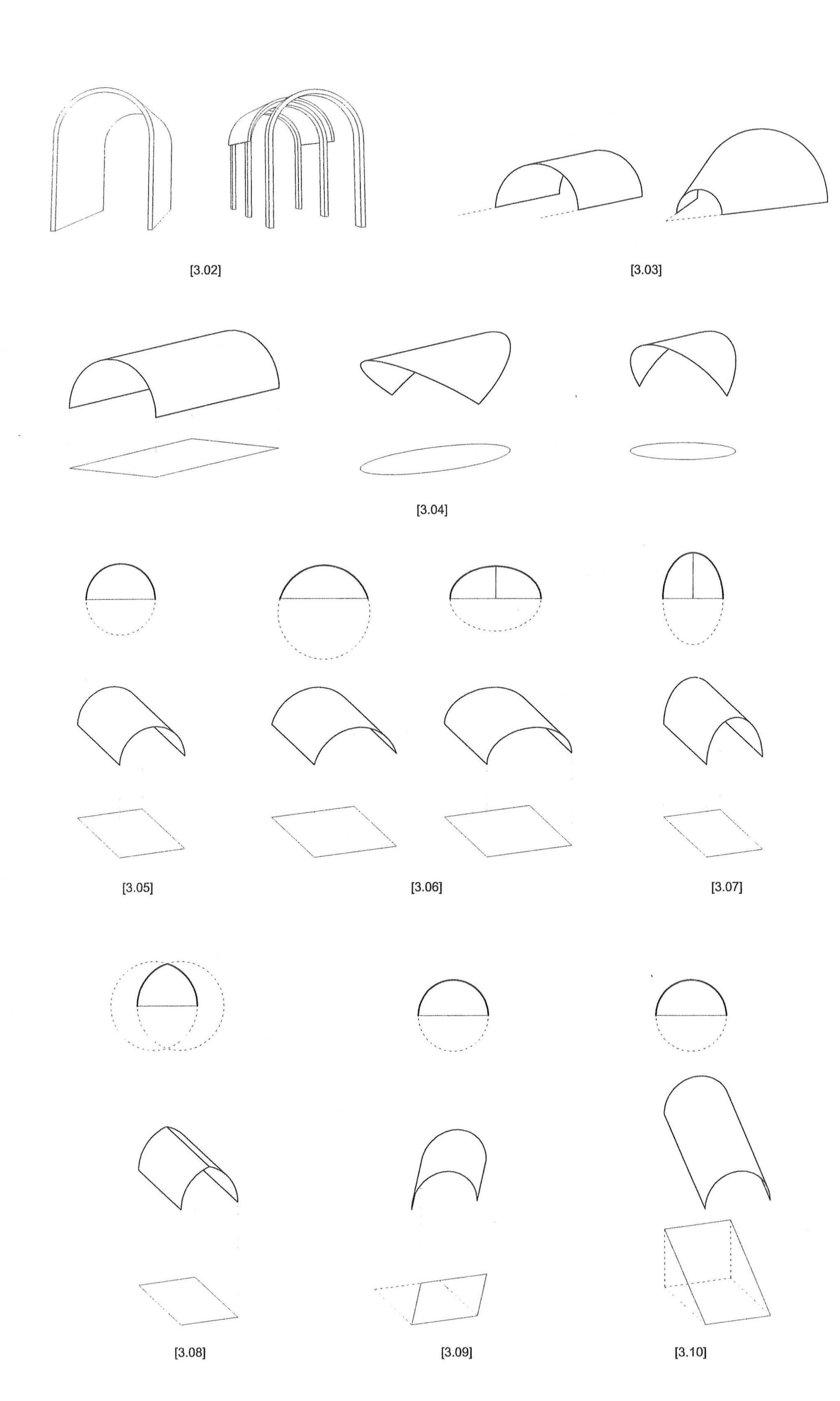
- *Bóveda* ***ojival*** *o de cañón apuntado*
  Es aquella cuya directriz perpendicular al eje de la bóveda está constituida por dos arcos de circunferencia que se cortan en el punto más alto [3.08].

- *Bóveda de* ***oblicua***
  Es aquella cuya directriz no forma un ángulo recto en planta con el eje de la bóveda [3.09].

- *Bóveda* ***ascendente o descendente***
  Es aquella cuya directriz no forma un ángulo recto en sección con el eje de la bóveda [3.10]. Su uso suele estar asociado a la cubrición de espacios de comunicación vertical entre distintas plantas de edificios.

---

[25] No se pretende hacer una clasificación exhaustiva, sino recoger bóvedas utilizadas para cubrir espacios arquitectónicos.



[3.02]

[3.03]

[3.04]

[3.05]

[3.06]

[3.07]

[3.08]

[3.09]

[3.10]

b) Cónicas o de generatrices no paralelas

Generalmente cubren superficies de planta triangular o trapezoidal. En raras ocasiones, cubren plantas circular, elíptica, etc.

Suelen resolverse mediante superficies cónicas de eje horizontal, focalizando el espacio hacia un punto (vértice del cono).

La directriz es, habitualmente, un arco de media circunferencia y las generatrices convergen en un punto (medio cono de revolución). Es decir, está formada por una radiación de generatrices que se apoyan en una directriz circular y fugan al vértice del cono [3.11].

Un uso habitual de este tipo de bóvedas es como elemento de transición entre una planta cuadrada y otra octogonal, denominándose *trompa*[26]. Por tanto, no se trata de una superficie destinada a la cubrición del espacio propiamente dicha. El paso de planta cuadrada a octogonal suele hacerse por medio de cuatro semiconos de eje horizontal, cada uno de ellos tangente en dos paramentos verticales contiguos del espacio cuadrado y con vértice en la arista intersección de ambos paramentos [3.12].

3.2.2. Compuestas

Construidas a partir de la intersección de dos o más bóvedas simples.

Suelen cubrir espacios de planta poligonal, bien de lados iguales (normalmente polígonos de cuatro lados, aunque también de tres, seis, ocho lados, etc.) o desiguales (generalmente rectángulos). Según la ***planta a cubrir***, se distinguen entre:

a) Plantas poligonales de lados iguales

Habitualmente resultan de la intersección de superficies cilíndricas de revolución de igual radio.

Las más comunes en la cubrición de espacios arquitectónicos son:

- *Bóveda por* ***aristas recta***

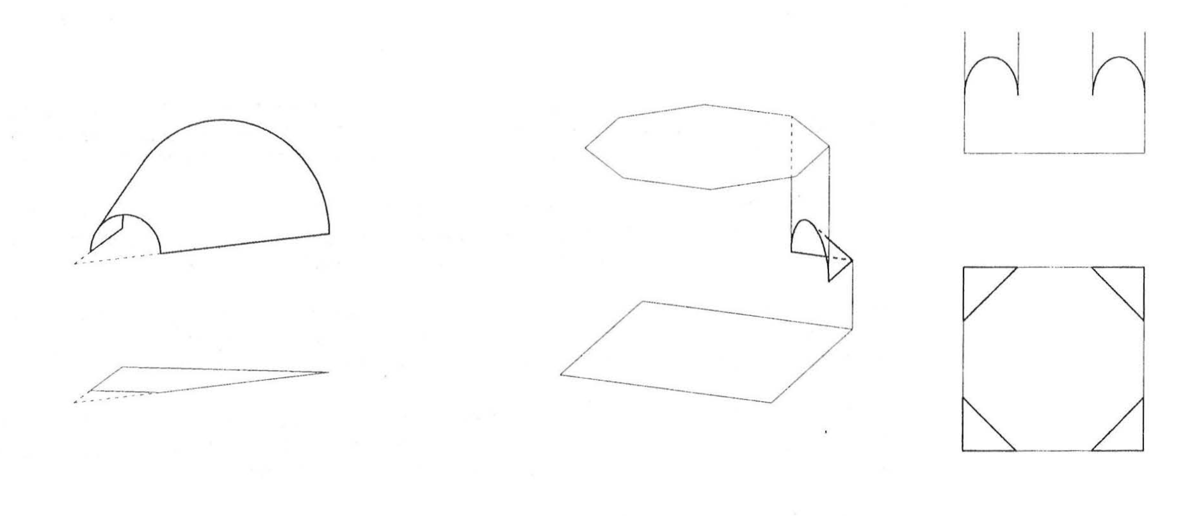
  Habitualmente está formada por la intersección de dos cilindros de revolución (dos bóvedas de cañón) del mismo radio, normalmente con ejes horizontales, que se cortan ortogonalmente, tomando de cada uno, las porciones exteriores al otro. Es decir, el espacio interior está conformado por la unión de los dos cilindros [3.13].

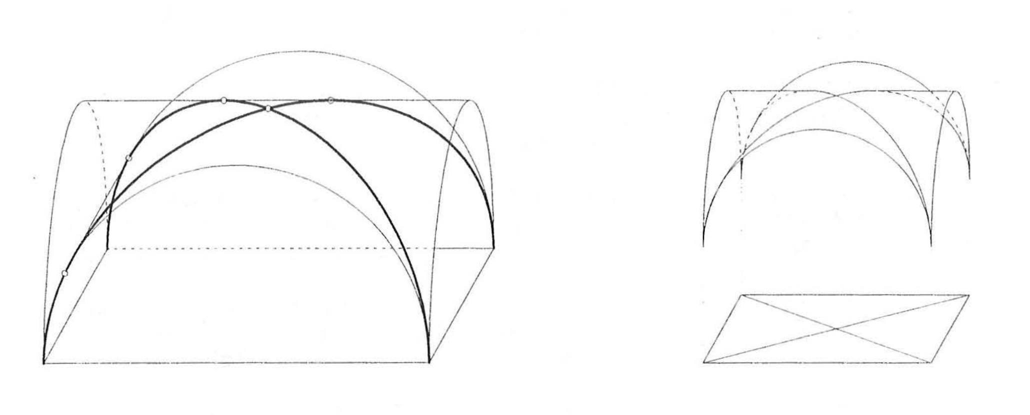
  Al tratarse de la intersección de cilindros en posición de bitangencia, las líneas resultantes de esta intersección son **semielipses** (excepto en plantas poligonales de lados impares que son cuartos de elipses), situadas en planos verticales, que se proyectan sobre las diagonales del polígono cubierto (ver apartado 2.3.1.b).

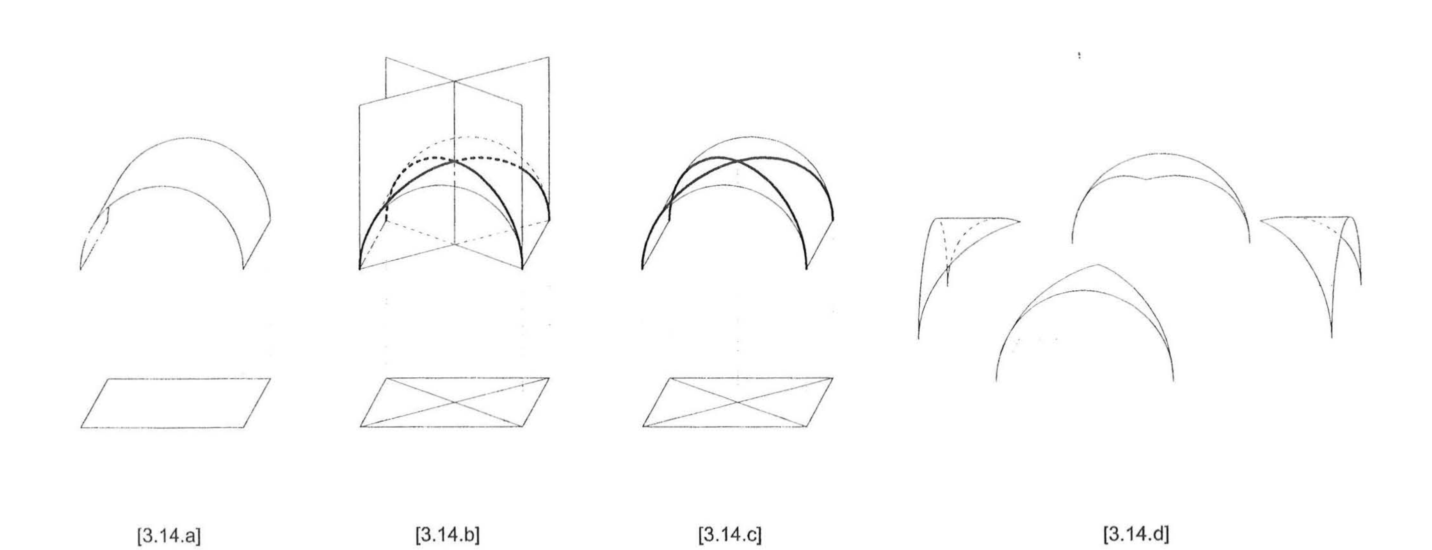
  En el caso más común, el de planta cuadrada, partiendo de una bóveda de cañón de eje horizontal que cubre una planta cuadrada [3.14.a], si se trazan dos planos verticales que contengan las diagonales [3.14.b], la intersección de la bóveda con ambos planos son dos semielipses [3.14.c].

  Estas semielipses dividen a la bóveda en cuatro partes, iguales dos a dos: dos delimitadas por una semicircunferencia (directriz) y dos por los muros de apoyo. Si se juntan cuatro partes de las delimitadas por una semicircunferencia, se obtendrá una bóveda por aristas soportada en cuatro apoyos puntuales [3.14.d].

[26] Conviene distinguir las trompas de las pechinas. Éstas últimas son elementos de transición esféricos que transforman una planta cuadrada en circular.


[3.11] [3.12]


[3.13]


[3.14.a] [3.14.b] [3.14.c] [3.14.d]

Aunque el caso más normal es el comentado anteriormente (intersección de dos cilindros), también se denominan bóvedas por aristas a la intersección de tres o más cilindros en posición de bitangencia, cubriendo plantas triangulares, hexagonales, octogonales, etc [3.15] [3.16].

Lo más habitual es que las generatrices de las superficies que forman la bóveda por aristas sean horizontales. Sin embargo, en algunas ocasiones, se puede encontrar una bóveda por aristas con *peralte de vértice*, produciéndose una compresión o dilatación espacial.

Se trata de bóvedas en la que cambia la luz de la clave con respecto a las bocas de acceso, con la consiguiente modificación espacial. Este efecto se consigue mediante la intersección de superficies cilíndricas con generatrices inclinadas o la intersección de superficies cónicas.

Surgen por la intersección de cuatro cilindros de revolución (cuatro bóvedas de cañón) del mismo radio y ejes inclinados [3.17.a] o cuatro conos de ejes horizontales [3.17.b], que se cortan ortogonalmente, cubriendo, en ambos casos, una planta cuadrada.

La bóveda por aristas se sustenta sobre apoyos puntuales, situados sobre cada vértice del polígono que cubre.

- *Bóveda de* ***rincón de claustro recta***

Habitualmente está formada por la intersección de dos cilindros de revolución (dos bóvedas de cañón) del mismo radio, normalmente con ejes horizontales, que se cortan ortogonalmente, tomando de cada uno, las porciones interiores al otro. Es decir, el espacio interior está conformado por la intersección a los dos cilindros [3.18].

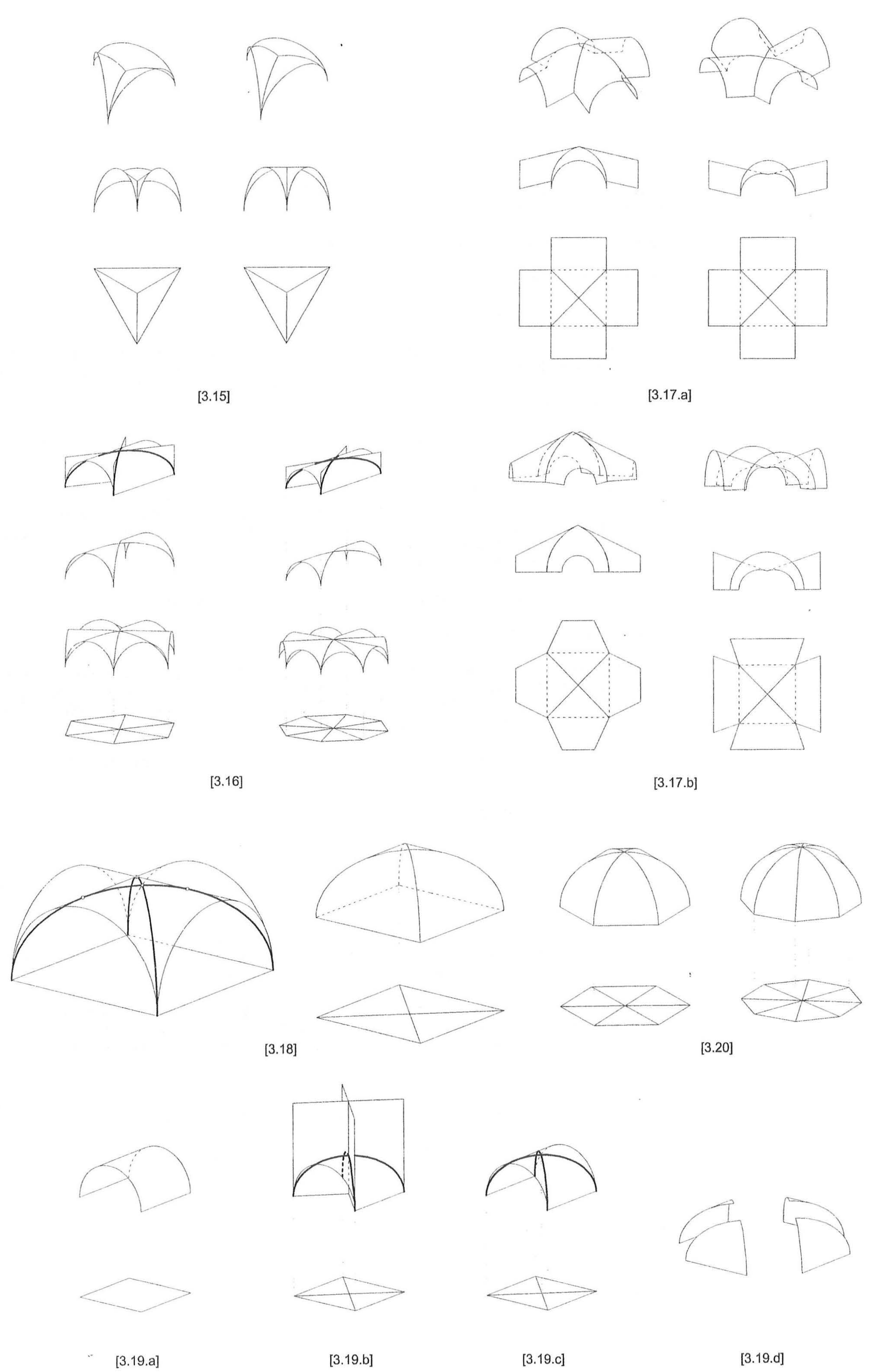
Al igual que en la bóveda por aristas recta, la intersección son **semielipses** (excepto en plantas poligonales de lados impares que son cuartos de elipses), situadas en planos verticales, por lo que todo lo relativo a la intersección coincide con lo comentado anteriormente.

En el caso más común, el de planta cuadrada, partiendo de una bóveda de cañón de eje horizontal que cubra una planta cuadrada [3.19.a], si se trazan dos planos verticales que contengan las diagonales [3.19.b], la intersección de la bóveda con ambos planos son dos semielipses [3.19.c].

Estas semielipses dividen a la bóveda en cuatro partes, iguales dos a dos: dos delimitadas por una semicircunferencia (directriz) y dos por los muros de apoyo. En este caso, a diferencia del anterior, se juntarán cuatro partes delimitadas por los muros de apoyo [3.19.d].

Aunque el caso más normal es el comentado anteriormente (intersección de dos cilindros), también se denominan bóvedas de rincón de claustro a la intersección de tres o más cilindros en posición de bitangencia, cubriendo plantas triangulares, hexagonales, octogonales, etc [3.20].

La bóveda de rincón de claustro se sustenta sobre apoyos lineales, situados sobre cada lado del polígono que cubre.



[3.15] [3.17.a]

[3.16] [3.17.b]

[3.18] [3.20]

[3.19.a] [3.19.b] [3.19.c] [3.19.d]

b) *Plantas poligonales de lados desiguales*

Habitualmente resultan de la intersección de superficies de revolución de distinto radio, aunque no siempre (por ejemplo, la bóveda esquifada de aristas rectas).

El espacio resultante tiene una dirección dominante.

Las más usuales en edificios arquitectónicos son:

- *Bóveda por* ***aristas alabeada***

  Habitualmente está formada por la intersección de dos cilindros desiguales en posición de tangencia (de directrices desiguales pero con la misma altura de la clave), tomando de cada uno, las porciones exteriores al otro (ver apartado 2.3.1.b). Es decir, su intradós está constituido por la macla (unión) de los dos cilindros) [3.21].

  La intersección es una **cuártica alabeada con un punto doble**. Para hallar dicha intersección, se pueden emplear planos auxiliares horizontales.

  En este caso, la línea de la intersección se compone de: una cuártica con un punto doble (propia de una intersección en la que se produce una tangencia) y una sección plana del cilindro mayor sobre los muros de apoyo del cilindro menor (elipse degenerada en circunferencia). Al producirse una continuidad entre el cilindro menor y los muros laterales que lo sustentan, ambas curvas tienen una recta tangente común en los puntos de contacto.

  Se sustenta sobre apoyos puntuales, situados en cada vértice del rectángulo que cubre.

- *Bóveda de* ***rincón de claustro alabeada***

  Habitualmente está formada por la intersección de dos cilindros desiguales en posición de tangencia (de directrices desiguales pero con la misma altura de la clave), tomando de cada uno, las porciones interiores al otro (ver apartado 2.3.1.b). Es decir, que su intradós está constituido por la superficie común (intersección) a los dos cilindros [3.22].

  Al igual que en la bóveda por aristas alabeada, la intersección es una **cuártica alabeada con un punto doble**, por lo que todo lo relativo a la intersección coincide con lo comentado anteriormente.

  Se sustenta sobre apoyos lineales, situados en cada lado del rectángulo que cubre.

- *Bóveda* ***esquifada***

  Está formada por la intersección de una bóveda de cañón con dos medios cilindros, en el cierre de los testeros.

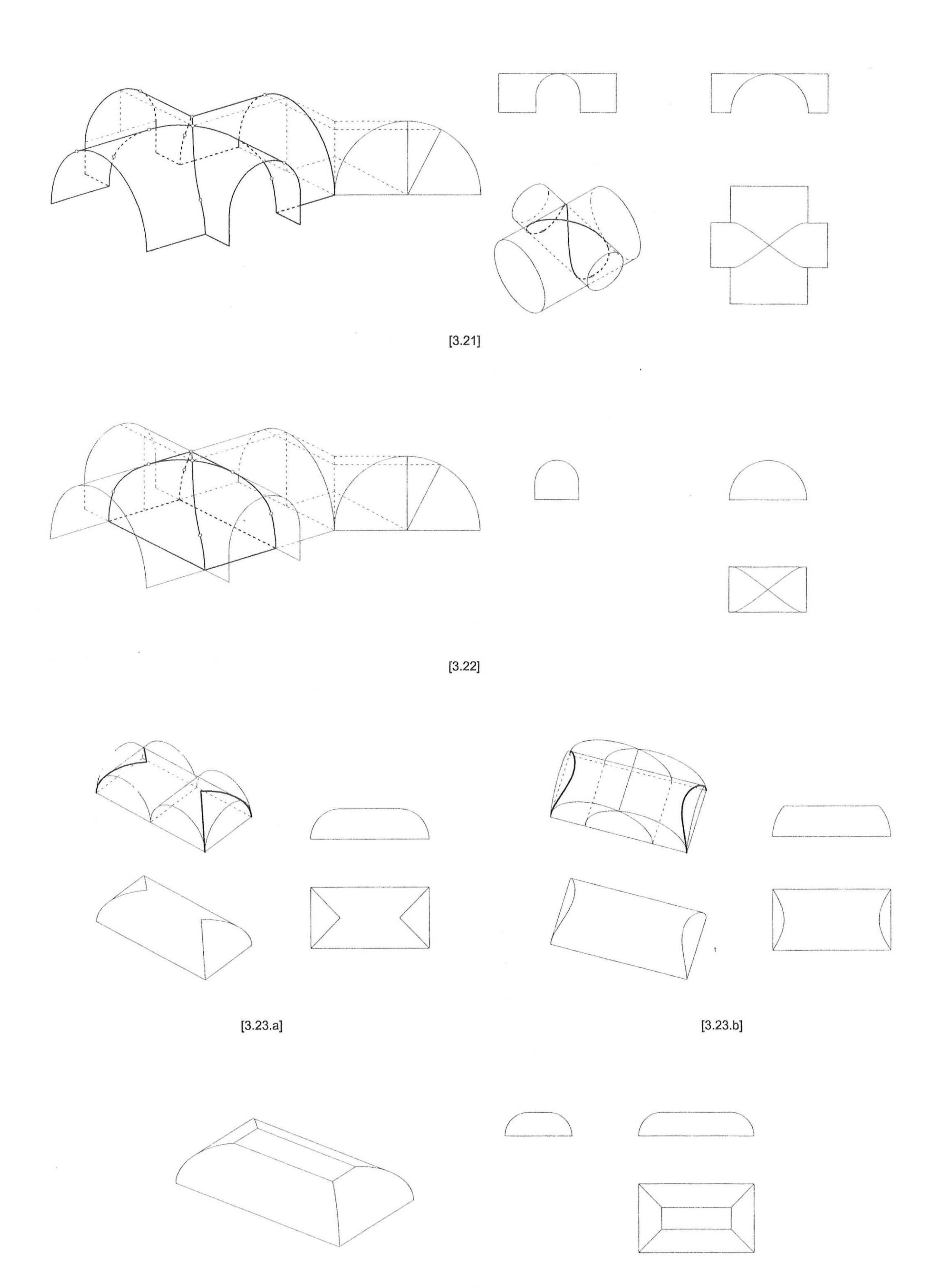
  Si todos los cilindros tienen el mismo radio en posición de bitangencia, se denominará bóveda *esquifada* ***de aristas rectas***[27] [3.23.a]. Al tratarse de una intersección en posición de bitagencia (ver apartado 2.3.1.b), las líneas intersección serán **arcos de elipses**.

  Si los cilindros que forman los testeros tienen radios distintos al otro, se denominará bóveda *esquifada de* ***aristas alabeadas***. En este caso, al tratarse de una penetración (ver apartado 2.3.1.c), la línea intersección será una **cuártica descompuesta en dos ramas** alabeadas independientes [3.23.b].

  Una variante de la bóveda anterior, consiste en una bóveda esquifada rematada por un plano horizontal, lo que algunos autores han denominado bóveda *de espejo* [3.24].

  Se sustenta sobre apoyos lineales, situados en cada lado del rectángulo que cubre.

[27] Si la planta cubierta fuera cuadrada, estaríamos hablando de una bóveda de rincón de claustro recta.


[3.21]

[3.22]

[3.23.a]

[3.23.b]

[3.24]

- *Bóveda de* ***lunetos***[28]

Formada por la intersección de una bóveda de cañón con un cono o un cilindro de distinta altura, normalmente en posición de penetración (ver apartado 2.3.1.c), con objeto de proporcionar entradas de luz, ventilación, etc.

La línea intersección es una **cuártica** y se obtiene mediante planos auxiliares que pasen por los vértices de las cuádricas, como se menciona en el apartado 2.1.1.

Suelen tener los ejes coplanarios. Según lo mencionado en el apartado 2.3.2.d, en la proyección ortogonal a la intersección (planta), se formarán arcos de hipérbola.

Las más habituales suelen ser:

- *luneto* ***recto***: es la penetración de dos bóvedas de distinta altura y cuyos ejes forman un ángulo recto [3.25].
- *luneto* ***oblicuo***: es la penetración de dos bóvedas de distinta altura, cuyos ejes forman un ángulo distinto a 90º [3.26].
- *luneto* ***cilíndrico***: es la penetración de dos bóvedas de cañón de distinta altura cuyos ejes están en un mismo plano horizontal [3.25].
- *luneto* ***cónico***: es la penetración de un cono en una bóveda de cañón cuyos ejes están en un mismo plano horizontal [3.27].
- *luneto* ***empinado***: es la penetración de dos bóvedas de distinta altura, cuyos ejes no están en el mismo plano horizontal [3.28].
- *luneto de* ***sección plana***: es la penetración de una superficie reglada[29] sobre una bóveda de cañón cuya intersección está contenida en dos planos [3.29]. Este tipo de luneto es habitual por su sencillez de replanteo y ejecución, puesto que las intersecciones son dos **arcos de elipses** (ver apartado 1.5).

3.3. Composición de bóvedas

Consiste en la cubrición de espacios arquitectónicos, normalmente poligonales, por **repetición o sucesión de bóvedas** simples o compuestas (**módulo**).

3.3.1. Módulo simple

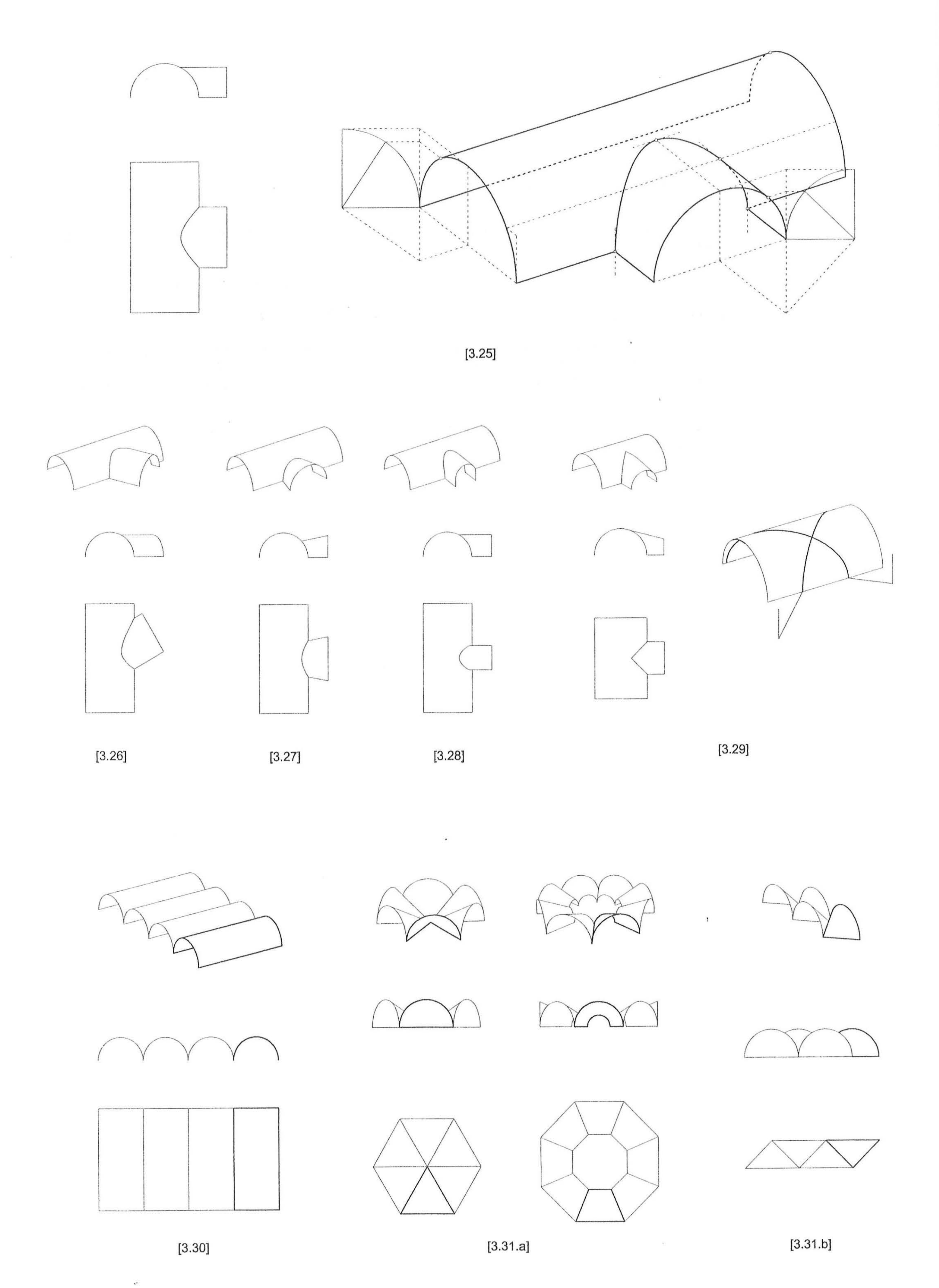
Es la formación de una cubierta generada por la repetición de un **módulo** formado por una **bóveda simple**.

Dos superficies contiguas comparten una generatriz, produciéndose una **discontinuidad en la superficie** (línea angulosa). Normalmente, estas líneas suelen ser las de menor cota de la cubierta (limahoyas), utilizadas para la evacuación del agua de lluvia.

Cuando el módulo es un cilindro de revolución, la planta cubierta es un polígono de cuatro lados, normalmente ortogonales entre sí, dividiendo el área en subespacios unidireccionales [3.30].

En cambio, cuando el módulo está formado por un cono de revolución, la planta cubierta es un polígono de cuatro o más lados. Si los conos tienen el vértice común, el área se divide en subespacios focalizados a un punto común [3.31.a]. En caso contrario, el área se divide en subespacios focalizados a tantos puntos como módulos compongan la cubierta [3.31.b].

[28] Se denomina *luneto* (o luneta) a la penetración de dos bóvedas de diversa montea (altura).
[29] No se trata de una superficie cuádrica.



[3.25]

[3.26] [3.27] [3.28] [3.29]

[3.30] [3.31.a] [3.31.b]

3.3.2. Módulo compuesto

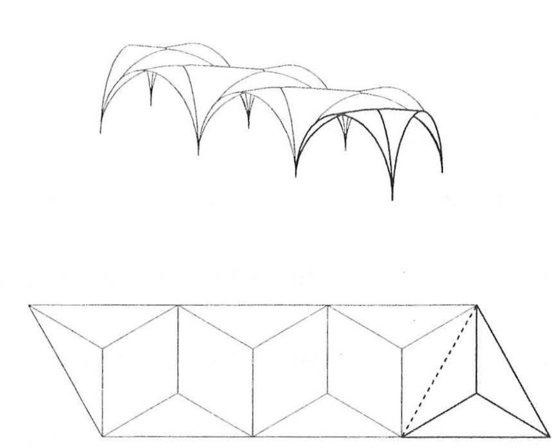
Es la formación de una cubierta generada por la repetición de un **módulo** formado por una **bóveda compuesta**.

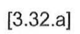
Dos superficies contiguas comparten una directriz, estableciéndose una **continuidad superficial**.

En este caso, existe una gran variedad de formas en función del módulo elegido (triangular, cuadrado, ...).

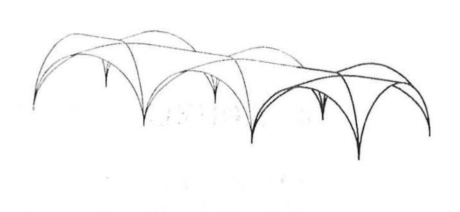
Como ejemplo, se muestra una cubierta constituida por la repetición de un módulo formado por una bóveda por aristas recta de planta triangular (tres cilindros de revolución en posición de bitangencia), cubriendo una planta romboidal [3.32.a] y cuadrada (cuatro cilindros de revolución en posición de bitangencia), cubriendo una planta rectangular [3.32.b].

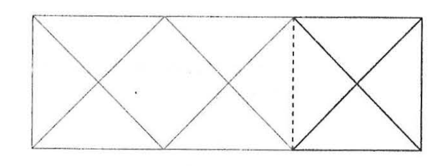
Sin embargo, cambiando la disposición del módulo de la figura 3.32.a, se pueden cubrir plantas diferentes: triangulares [3.33.a], hexagonales [3.33.b], etc.



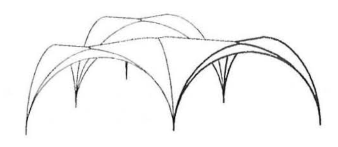


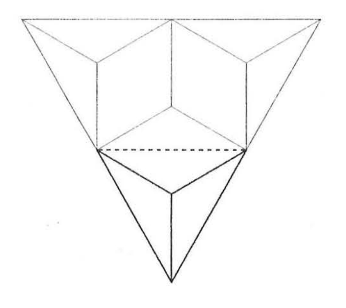
[3.32.a]



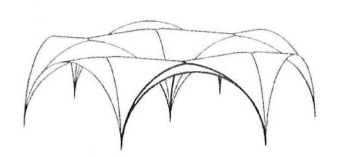


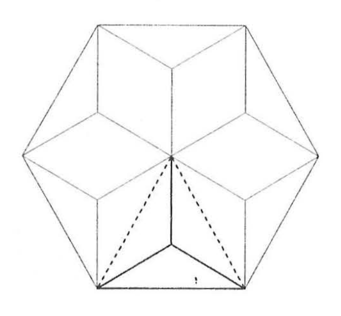
[3.32.b]





[3.33.a]





[3.33.b]

4. ANEXO: TEOREMAS DE CUÁDRICAS

Para una identificación de la intersección más eficaz, los teoremas de cuádricas que se exponen a continuación resultan una gran ayuda.

No se pretende hacer una clasificación exhaustiva de los mismos, sino reflejar los más prácticos para el alumno de geometría descriptiva.

Su demostración matemática, no es objeto de esta publicación, aunque existe una extensa bibliografía al respecto.

Los teoremas a los que se hace referencia durante el desarrollo de esta publicación, vienen acompañados del apartado correspondiente de la misma.

A. Teoremas fundamentales

- *Toda sección plana de una cuádrica es una cónica.*
  (apartado 1.5)

- *Dos secciones planas de una misma cuádrica son homológicas.*
  (apartado 1.5)

- *La intersección de dos cuádricas es, en general, una curva de cuarto grado y la proyección de esta curva sobre cualquier plano es, en general, una curva plana de cuarto grado.*
  (apartado 2.2.1).

- *Dos cuádricas que tienen una cónica común (reducida o no), el resto de la intersección será otra cónica (reducida o no).*
  (apartado 2.3.2.a)

- *Dos cuádricas tangentes en dos puntos, se cortan según dos curvas planas (cónicas) que pasan por dichos puntos.*
  (apartado 2.3.1.b)

- *La intersección de dos cuádricas que tienen un plano de simetría común, se proyecta ortogonalmente sobre ese plano o uno paralelo a él como una cónica (curva que puede degenerar en dos rectas).*
  (apartado 2.3.2.c)

- *Si dos cuádricas que se intersecan según dos curvas planas, tienen un plano de simetría común, que también lo es para cada una de las curvas planas, la proyección ortogonal sobre dicho plano o uno paralelo a él serán dos rectas.*

  Si el plano de simetría lo es para las cuádricas pero no para las cónicas, la proyección ortogonal sobre dicho plano o uno paralelo a él, será una cónica en la que se proyectan las dos en el espacio.

- *La curva de tangencia entre dos cuádricas es plana.*

- *Dos cuádricas homotéticas se intersecan según dos curvas planas, una propia y otra impropia.*

B. Teoremas sobre el tipo de cónica proyección

- *La intersección de dos cuádricas de revolución con ejes paralelos se proyecta ortogonalmente en el plano de los ejes o uno paralelo a él según arco o arcos de la misma parábola.*
  (apartado 2.3.2.e)

- *La intersección de dos cuádricas de revolución de ejes incidentes se proyecta ortogonalmente en el plano de los ejes o uno paralelo a él según arco o arcos de la misma hipérbola.*
  (apartado 2.3.2.d)

C. Teoremas cuádricas regladas

- *La intersección de dos cuádricas regladas que tienen en común una generatriz, se completa con una curva de tercer grado.*
  (apartado 2.2.1)

- *La intersección de dos cuádricas regladas que tienen en común dos generatrices concurrentes, se completa con otras dos generatrices o una cónica.*

5. BIBLIOGRAFÍA

Las referencias bibliográficas que se incluyen, permiten ampliar información sobre las materias tratadas.

Álvarez, J. (1991): **Geometría Descriptiva. Líneas y superficies**. Universidad Politécnica de Madrid. Madrid.

Carmona Barrero, J. D. (1999): **Curso sobre bóvedas: Introducción a las técnicas de ejecución y restauración**. Consultores de arquitectura y rehabilitación. Badajoz.

Engel, H. (2001): **Sistemas de estructuras**. Gustavo Gili. Barcelona.

Izquierdo Asensi, F. (1975): **Geometría descriptiva superior y aplicada**. Dossat. Madrid.

Izquierdo Asensi, F. (1987): **Geometría descriptiva**. Dossat, 17ª ed. Madrid.

Izquierdo Asensi, F. (1987): **Ejercicios de geometría descriptiva**. Dossat, 10ª ed. Madrid.

Rabasa Díaz, E. (2000): **Proyección y representación. Conceptos intuitivos**. Instituto Juan de Herrera. Madrid.

Ruiz Aizpiri, J. M. (1973): **Geometría descriptiva**. Guadiana. Madrid.

Sánchez Gallego, A. (1993): **Geometría descriptiva: Sistemas de proyección cilíndrica**. Universidad Politécnica de Cataluña. Barcelona.

Taibo, A. (1983): **Geometría descriptiva y sus aplicaciones (I y II).** Tebar. Madrid.

Villanueva Bartrina, L. (1997): **Perspectiva lineal. Su relación con la fotografía**. Universidad Politécnica de Cataluña. Barcelona.

NOTAS

NOTAS

CUADERNO

229.01

CATÁLOGO Y PEDIDOS EN
http://www.aq.upm.es/of/jherrera
info@mairea-libros.com

84-9728-220-5

